

**Einbettungen
komplexer Räume im Sinne von GRAUERT
in Zahlenräume**

**Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde der
Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität München**

vorgelegt von
Klaus-Werner Wiegmann
aus Bochum

München, im Mai 1965

1965

**Einbettungen
komplexer Räume im Sinne von GRAUERT
in Zahlenräume**

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde der
Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Klaus-Werner Wiegmann
aus Bochum

München, im Mai 1965

Berichterstatter: Professor Dr. K. STEIN

Professor Dr. M. KOECHER

Tag der mündlichen Prüfung: 28. Juli 1965



Einbettungen
komplexer Räume im Sinne von GRAUERT
in Zahlenräume

von
Klaus-Werner Wiegmann

Inhalt

Einleitung	2
I. Vorbereitungen	
§1. Allgemeine Bezeichnungen und Hilfsmittel	6
§2. Komplexe Räume; Definitionen	16
II. Topologische Gesichtspunkte	
§3. Darstellungs- und Trennungssatz	33
§4. Injektive und diskrete Abbildungen	39
§5. (Fast-)eigentliche Abbildungen	43
III. Algebraische Gesichtspunkte	
§6. Tangentialräume	51
§7. Reguläre Abbildungen	60
IV. Zusammenfassung	
§8. Einbettungsabbildungen	68
§9. Anhang	75
Literatur	81

Einleitung.

In der komplexen Analysis hat man schon früh versucht, die Idee der RIEMANNschen Fläche auf mehrere Veränderliche zu übertragen. C.CARATHÉODORY, O.TEICHMÜLLER und H.HOPF behandelten zunächst komplexe Mannigfaltigkeiten. Es erwies sich jedoch als notwendig, Verzweigungspunkte ohne unifomisierbare Umgebungen zuzulassen, was zum Begriff des komplexen Raumes geführt hat; hier sind H.BEHNKE, K.STEIN und H.CARTAN zu erwähnen. Eine umfassende Definition gab J.P.SERRE [30]: Ein komplexer Raum ist ein beringter Raum $(X, \mathcal{A})$, dessen "Strukturgarbe" $\mathcal{A}$ die holomorphen Funktionen auf X angibt. Lokal ist X eine analytische Menge. In den letzten Jahren hat sich gezeigt, daß eine weitere Verallgemeinerung des Begriffs, die von H.GRAUERT [15] angegeben wurde, zweckmäßig ist. Die Strukturgarbe auf komplexen Räumen nach der Definition von GRAUERT ist feiner als die SERRESche; sie bestimmt keine Funktionen im üblichen Sinn. Lokal handelt es sich um analytische Mengen mit Vielfachheiten.

Global kann i.a. weder eine komplexe Mannigfaltigkeit als offener Teil noch ein komplexer Raum als analytische Menge eines Zahlenraumes realisiert werden. Jedoch bewies REMMERT [26], daß jede holomorph-vollständige (= STEINSche) Mannigfaltigkeit X in einen Zahlenraum $\mathbb{C}^N$ für genügend großes N eingebettet werden kann. NARASIMHAN [24] und BISHOP [1] zeigten später, daß $N = 1 + 2 \dim X$ gewählt werden kann, und daß die Menge der Einbettungsabbildungen von X in den $\mathbb{C}^N$ dicht in der Gesamtheit H^N aller holomorphen Abbildungen $X \rightarrow \mathbb{C}^N$ liegt, wenn H^N mit der Topologie der kompakten Konvergenz versehen wird. NARASIMHAN konnte die Aussage auch auf SERRESche Räume ausdehnen [24]: Hat $(X, \mathcal{A})$ die komplexe

Dimension n und die Einbettungsdimension m , so sind die Einbettungsabbildungen von X in den $\mathbb{C}^N$ dicht in H^N für $N = \max \{n+m, 2n+1\}$. Eine Einbettung ist eine globale biholomorphe Abbildung von X auf eine Untermannigfaltigkeit bzw. einen komplexen Unterraum des $\mathbb{C}^N$.

In der vorliegenden Arbeit soll der Einbettungssatz von REMMERT-NARASIMHAN-BISHOP für GRAUERTSche Räume bewiesen werden. Die Übertragung ist nicht einfach, weil eine holomorphe Abbildung $(X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ komplexer Räume im Sinne von GRAUERT nicht allein durch die Zuordnung $X \rightarrow Y$ gegeben wird. Vielmehr ist $(X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ ein Paar (φ, φ^*) aus einer stetigen Abbildung $\varphi : X \rightarrow Y$ und einer geeigneten Familie $\varphi_x^* : \mathcal{B}_{\varphi(x)} \rightarrow \mathcal{A}_x$ ($x \in X$) von Algebra-Homomorphismen.

(φ, φ^*) ist genau dann eine Einbettungsabbildung, wenn φ injektiv und eigentlich sowie jedes φ_x^* surjektiv ist; bei Gültigkeit der letzten Bedingung wird (φ, φ^*) regulär genannt. Eine injektive und eigentliche Abbildung ist topologisch. Eigentlich bewirkt allein, daß das Bild von X eine analytische Menge ist. Die Regularität bedeutet, daß die Abbildung in kleinen Umgebungen der Punkte biholomorph ist.

Für $Y = \mathbb{C}^N$ und $\mathcal{B} = \mathcal{O}$ wird (φ, φ^*) durch genau ein N -Tupel auf $(X, \mathcal{A})$ holomorpher "Funktionen" aus $H^0(X, \mathcal{A}) = A$ definiert. Die Menge A kann in kanonischer Weise zu einem topologischen Raum gemacht werden.

Der Beweis des Einbettungssatzes für allgemeine komplexe Räume geschieht in drei Schritten: Es sei $(X, \mathcal{A})$ biholomorph-vollständig mit der Dimension n und der Einbettungsdimension m . $A = H^0(X, \mathcal{A})$ ist ein FRECHET-Raum, weil X abzählbare Topologie besitzt. Es gilt:

- (1) Die Menge der injektiven holomorphen Abbildungen
 $X \rightarrow \mathbb{C}^{2n+1}$ ist fett in A^{2n+1} .
- (2) Die Menge der regulären holomorphen Abbildungen
 $X \rightarrow \mathbb{C}^{n+m}$ ist fett in A^{n+m} .

"Fett" ist eine Verschärfung von dicht, die für den Beweis wichtig ist : Abzählbare Durchschnitte fetter Mengen sind fett. In (1) und (2) dürfen wir A durch einen vollständigen Untervektorraum $B \subset A$ ersetzen, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind :

zu (1) : B trennt alle Punkte von X ,

zu (2) : $(X, \mathcal{A})$ besitzt lokale Koordinaten durch Funktionen aus B .

Wir geben eine weitere wichtige Aussage an :

- (3) Zu jeder Ausschöpfung $K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset X$ durch kompakte Mengen und jeder Folge $\beta_0, \beta_1, \dots$ reeller Zahlen gibt es eine holomorphe Abbildung f aus A^{2n+1} , so daß
 $|f(x)| \geq \beta_v$ für alle $x \in X \setminus K_v$ ($v=0,1,\dots$).

f ist genau dann eigentlich, wenn die Zahlen β_v nach Unendlich gehen. Aus (1), (2) und (3) folgt der Einbettungssatz.

Eine Methode von O.FORSTER [10] erlaubt es, den Satz (2) zu verschärfen. Wir definieren eine natürliche Zahl $b = b(X, \mathcal{A})$, die nicht größer als $n+m$ ist. Für SERRESche oder gar normale Räume ist $b < n+m$ bzw. $b < n+m-1$. In (2) darf $n+m$ gegen b ausgetauscht werden. Der Einbettungssatz gilt deshalb auch für $N = \max \{ 2n+1, b \}$. Wir erhalten insbesondere :

Ist X ein holomorph-vollständiger Raum im Sinne von SERRE mit $m > n+1$, so liegt die Menge der Einbettungsabbildungen $X \rightarrow \mathbb{C}^{n+m-1}$ dicht in A^{n+m-1}

Nach allgemeinen Vorbereitungen im Kapitel I beweisen wir in II und III die Sätze (1), (2) und (3) bei teilweise schwächeren Voraussetzungen und im Kapitel IV die Hauptsätze über Einbettungen. Ohne zusätzlichen Aufwand folgen weitere Resultate über Mengen holomorpher Abbildungen, die meist fett sind. Diese und die schon erwähnten Ergebnisse haben wir am Ende der Arbeit in einer Tabelle zusammengestellt.

Es sei mir gestattet, Herrn Professor Dr. K.STEIN und Herrn Privatdozent Dr. O.FORSTER für zahlreiche Anregungen und wertvolle Hinweise zu danken.

I. Vorbereitungen.

Zunächst wollen wir die wichtigsten Definitionen und Sätze zusammenstellen, die wir bei der Behandlung von holomorphen Abbildungen komplexer Räume benötigen werden.

§ 1. Allgemeine Bezeichnungen und Hilfsmittel.

Ist $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung, dh. f ist ein Tripel (A, B, F) von Mengen A, B und $F \subset A \times B$ mit einelementigen Durchschnitten $F \cap (\{a\} \times B)$ für alle $a \in A$, so wollen wir durch $a \rightsquigarrow f(a) = b$ andeuten, daß $a \in A$ durch f in $b \in B$ abgebildet wird. Für $A_1 \subset A$ und $B_1 \subset B$ sei wie üblich definiert :

$$f(A_1) := \{f(a) : a \in A_1\}, \quad f^{-1}(B_1) := \{a \in A : f(a) \in B_1\}.$$

$f(x)$, $f(\{x\})$ und $\{f(x)\}$ werden identifiziert. f ist injektiv, wenn $\{x\} = f^{-1}(f(x))$ ist für alle $x \in A$. f ist surjektiv, falls $f(A) = B$ ist. Sind beide Bedingungen erfüllt, so heißt f bijektiv. Bezeichnet $\mathcal{P}(A)$ bzw. $\mathcal{P}(B)$ die Potenzmenge von A bzw. B , so ist auch $f^{-1} : \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A)$, $B_1 \rightsquigarrow f^{-1}(B_1)$, eine Abbildung. Die Mengen $f^{-1}(b) \subset A$ für $b \in B$ heißen Fasern von f . Ist $f : A \rightarrow B$ bijektiv, so ist auch $f^{-1} : B \rightarrow A$ mit dem Graphen $\{(b, a) \in B \times A : b = f(a)\}$ eine Abbildung. Es gilt in diesem Fall $f^{-1}(b) = f^{-1}(b)$. id_A sei die identische Abbildung auf einer Menge A , $a \rightsquigarrow a$.

Es seien $f_i : A \rightarrow B_i$ und $g_i : B_i \rightarrow C_i$ Abbildungen ($i \in I$). Dann können wir bekanntlich verschiedene "Kombinationsabbildungen" definieren :

$$f := (f_i)_{i \in I} : A \rightarrow \prod_{i \in I} B_i, \quad a \rightsquigarrow (f_i(a))_{i \in I},$$

heißt Verbindung der f_i , $i \in I$. Die f_i werden Komponenten von f genannt.

$$\prod_{i \in I} g_i : \prod_{i \in I} B_i \rightarrow \prod_{i \in I} C_i, (b_i)_{i \in I} \rightsquigarrow (g_i(b_i))_{i \in I},$$

soll cartesisches Produkt der Abbildungen g_i , $i \in I$, heißen.

$$g_i \circ f_i : A \rightarrow C_i, a \rightsquigarrow g_i(f_i(a)),$$

heißt Verkettung von f_i und g_i .

In den topologischen Bezeichnungen wird BOURBAKIs Terminologie verwendet [4].

Mit $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ meinen wir (der Reihe nach) die natürlichen Zahlen einschließlich der Null, die ganzen, die rationalen, die reellen und die komplexen Zahlen. Die algebraische Struktur auf der Menge ergibt sich stets aus dem Zusammenhang. Das n -fache cartesische Produkt einer Menge A wird mit A^n bezeichnet. $\mathbb{P}_n$ sei der komplexeprojektive Raum der Dimension n .

Sind r und s natürliche Zahlen, G eine beliebige Menge, so bezeichnet $M(r \times s, G)$ die Gesamtheit aller Matrizen von r Zeilen und s Spalten mit Koeffizienten in G . Die Elemente von $M(r \times s, G)$ haben die Gestalt

$$(g_{\sigma\tau})_{\substack{\sigma=1,\dots,r \\ \tau=1,\dots,s}} \quad \text{oder einfach} \quad (g_{\sigma\tau}),$$

mit $g_{\sigma\tau} \in G$. Für den Fall, daß G ein Körper ist, sei der Rang $\text{rg } A$ eines Elementes $A \in M(r \times s, G)$ die Anzahl der linear unabhängigen Zeilen (oder Spalten) von A , aufgefaßt als Elemente des Vektorraumes G^s (oder G^r).

Ist X ein topologischer Raum, so ist $\mathcal{C}(X)$, das ist die Gesamtheit aller stetigen, komplexwertigen Funktionen auf X , ein Vektorraum über $\mathbb{C}$, wenn wir $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$

und $(\alpha f)(x) := \alpha \cdot f(x)$ für alle $f, g \in \mathcal{C}(X)$ und alle $\alpha \in \mathbb{C}$ setzen. ($\mathcal{C}(X)$ ist sogar eine Algebra mit $(fg)(x) := f(x) \cdot g(x)$). Für $F \subset \mathcal{C}(X)$ und $A = (a_{\sigma}) \in M(r \times s, F)$ nennen wir $rg_X A := rg(a_{\sigma}(x))$ den Rang von A im Punkte x aus X .

Ist $\alpha \in \mathbb{C}$, so ist der Absolutbetrag $|\alpha|$ wohldefiniert. Für $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ ist $|z| := \sup_{1 \leq v \leq n} |z_v|$ eine Norm.

Die Topologie auf dem $\mathbb{C}^n$ sei durch die Metrik $|z - z'|$, $z, z' \in \mathbb{C}^n$, definiert. Sie ist identisch mit der von der euklidischen Metrik

$$d(z, z') := \left(\sum_{v=1}^n |z_v - z'_v|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

induzierten Topologie.

Ist X eine Menge, $f : X \rightarrow \mathbb{C}^n$ eine Abbildung und $M \subset X$, so setzen wir

$$\|f\|_M := \sup |f(M)| := \sup_{x \in M} |f(x)| \quad \text{und} \\ \inf |f(M)| := \inf_{x \in M} |f(x)|.$$

X sei ein topologischer Raum. Eine Teilmenge U von X heißt bekanntlich nirgends dicht (oder rar), wenn ihre abgeschlossene Hülle keine inneren Punkte besitzt. $U \subset X$ heißt dicht (oder überall dicht), wenn die abgeschlossene Hülle $\bar{U}$ von U mit X übereinstimmt. $U \subset X$ ist mager, wenn U abzählbare Vereinigung von nirgends dichten Mengen aus X ist. Eine Menge $U \subset X$ heiße fett, wenn ihr Komplement $\bar{U} = X \setminus U$ mager in X ist. $U \subset X$ ist genau dann fett, wenn U Obermenge eines Durchschnitts von abzählbar vielen offenen und dichten Teilmengen von X ist. Abzählbare Durchschnitte von fetten Mengen sind wiederum fett.

Auch jede offene und dichte Menge ist fett. Allgemein ist aber nicht jede fette Menge dicht.

Beispiel : $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ versehen mit der Relativtopologie. Jede Menge $\{q\}$ mit $q \in \mathbb{Q}$ ist nirgends dicht in $\mathbb{Q}$. Also ist $\mathbb{Q}$ mager in $\mathbb{Q}$, und $\emptyset = (\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Q})$ ist fett, aber nicht dicht.

Es gibt allerdings eine Klasse von topologischen Räumen, für die jede fette Menge dicht ist (vgl. mit N. BOURBAKI [4, Chap. IX, § 5.3]).

Definition.

Ein topologischer Raum heißt "BAIREScher Raum", wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist :

- (0) Abzählbare Durchschnitte von offenen und dichten Mengen sind dicht.
- (1) Abzählbare Vereinigungen nirgends dichter Mengen haben keine inneren Punkte.
- (2) Nichtleere offene Mengen sind nicht mager.
- (3) Fette Mengen sind überall dicht. ---

Bei BOURBAKI [4, Chap. IX, § 5.3, th 1] sind auch die beiden folgenden Aussagen bewiesen :

Theorem (BAIRE).

- (a) Jeder lokal-kompakte topologische Raum ist BAIREsch.
- (b) (BAIREScher Dichtesatz) Jeder vollständige, metrisierbare topologische Raum ist BAIREsch. ---

Beispiele :

- (i) $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ sind BAIREsche Räume, wegen (a).
- (ii) X sei ein lokal-kompakter Raum mit abzählbarer Topologie (oder σ -kompakt, d.h. es gibt eine X ausschöpfende Folge kompakter Teilmengen). Dann ist $\mathcal{C}(X)$, versehen mit

der Topologie der kompakten Konvergenz, ein BAIREscher Raum, wegen (b), denn $\mathcal{C}(X)$ ist ein FRÉCHET-Raum.

(iii) Jeder abgeschlossene Untervektorraum von $\mathcal{C}(X)$ ist ein BAIREscher Raum. Speziell gilt für jeden komplexen Raum $(X, \mathcal{O})$ im Sinne von SERRE [30], daß $\mathcal{O}(X) = H^0(X, \mathcal{O})$ ein BAIREscher Raum ist, falls X abzählbare Topologie besitzt, siehe GRAUERT-REMMERT [19, Seite 290 f].

Gegenbeispiele :

(iv) $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Q}^n$ sind nichtBAIREsche Räume in der Relativtopologie von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^n$. ---

(1.1) Hilfssatz.

$\varphi : T \rightarrow R$ sei eine stetige, offene und surjektive Abbildung. Dann gilt: Das Bild bei φ jeder in T dichten Menge ist in R dicht. Das Urbild bei φ jeder dichten Menge in R ist dicht in T . Das Urbild bei φ einer fetten Teilmenge von R ist in T fett. ---

Beweis :

Für eine nichtleere, offene Menge $U \subset R$ ist auch $\varphi^{-1}(U)$ nichtleer und offen in T , weil φ surjektiv und stetig ist. Ist $T' \subset T$ dicht, so sind $\varphi^{-1}(U) \cap T'$ und $\varphi(\varphi^{-1}(U) \cap T)$ nichtleer. Andererseits ist $\varphi(T' \cap \varphi^{-1}(U)) \subset \varphi(T') \cap \varphi(\varphi^{-1}(U))$ und $\varphi(\varphi^{-1}(U)) = U$. $\varphi(T') \cap U \neq \emptyset$, $\varphi(T')$ ist dicht.

Ist $U \subset T$ offen und nichtleer, so ist es auch $\varphi(U) \subset R$. Deshalb kann für eine dichte Menge $R' \subset R$ auch $\varphi(U) \cap R'$ nicht leer sein, und es gibt ein $x \in U$ mit $\varphi(x) \in R'$, d.h. $x \in U \cap \varphi^{-1}(R')$, und $\varphi^{-1}(R')$ ist dicht.

Ein fester Teil $F \subset R$ ist Obermenge eines Durchschnitts $\bigcap_{i=0}^{\infty} R_i$ offener und dichter Mengen $R_i \subset R$. Somit gilt :

$\bar{\varphi}^1(F) \supset \bar{\varphi}^1(\cap R_i) = \cap \bar{\varphi}^1(R_i)$ für offene und dichte Mengen
 $\bar{\varphi}^1(R_i) \subset T$. ---

Ohne Mühe können wir die folgende Verschärfung zeigen :

Zusatz.

$R_1 \subset R$ sei eine dichte Menge, so daß für jedes Element r aus R_1 auch $M \cap \bar{\varphi}^1(r)$ in $\bar{\varphi}^1(r)$ dicht ist, so liegt M dicht in T . ---

Wir bemerken, daß eine solche Menge M i.a. in $\bar{\varphi}^1(R_1)$ enthalten ist, so daß der Zusatz nicht aus dem Hilfssatz folgt.

Beweis : Ist $U \subset T$ offen und nichtleer, so erhalten wir mit $\varphi(U)$ eine offene und nichtleere Teilmenge von R . Darum gibt es ein $r \in (R_1 \cap \varphi(U))$, und $U \cap \bar{\varphi}^1(r)$ ist nichtleer sowie offen in $\bar{\varphi}^1(r)$. Daher gibt es ein Element t aus $M \cap \bar{\varphi}^1(r) \cap U$, M ist dicht in T . ---

Den folgenden Satz werden wir sehr oft benutzen, vgl. mit N.BOURBAKI [4, Chap. I, § 3, n° 3, th 1] .

Theorem (BANACH).

Sind U und V vollständige, metrisierbare, topologische Vektorräume (über $\mathbb{C}$), so ist jede lineare, stetige und surjektive Abbildung $\varphi : U \rightarrow V$ offen . ---

Definition.

X und Y seien HAUSDORFF-Räume. Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt "(fast-)eigentlich", wenn die Urbilder $f^{-1}(K)$ kompakter Mengen $K \subset Y$ in X kompakt sind (bzw. kompakte Zusammenhangskomponenten besitzen) . ---

Der Begriff fasteigentlich stammt von BISHOP [1, Definition 7]. Eigentlich wird in dieser Weise sonst nur für lokal-kompakte Räume X und Y definiert. BOURBAKI [4, Chap. I, § 10] nennt

$f : X \rightarrow Y$ eigentlich, wenn für jeden topologischen Raum Z das cartesische Produkt $f \times \text{id}_Z : X \times Z \rightarrow Y \times Z$ eine abgeschlossene Abbildung ist. Sind X und Y lokal-kompakt, so sind beide Definitionen äquivalent.

Die Verbindung $f : X \rightarrow \prod_{i \in I} Y_i$ einer Familie $f_i : X \rightarrow Y_i$ ($i \in I$) stetiger Abbildungen ist schon (fast-)eigentlich, wenn ein f_j diese Eigenschaft besitzt. Diese Bedingung ist allerdings nicht notwendig, wie das folgende Beispiel zeigt:

Die Projektionen $\text{pr}_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(\alpha_1, \alpha_2) \rightsquigarrow \alpha_1$, sind stetig, aber nicht fasteigentlich. Ihre Verbindung ist jedoch die Identität auf $\mathbb{R}^2$ und somit eigentlich.

Auch die Verkettung und das cartesische Produkt eigentlicher Abbildungen sind eigentlich, Letzteres gilt wegen des Satzes von TYCHONOFF.

Definition.

Eine stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ heißt "diskret", wenn das Urbild jeder diskreten Menge aus Y in X diskret ist. ---

Eine stetige Abbildung ist genau dann diskret, wenn alle ihre Fasern diskrete Mengen sind. Verkettung, cartesisches Produkt und Verbindung diskreter Abbildungen sind diskret. Eine Verbindung (f_1, f_2) ist schon diskret, wenn eine der Abbildungen f_i diskret ist. Die Verbindung nichtdiskreter Abbildungen kann allerdings diskret sein (Beispiel : Projektionen wie oben) .

Unter einem Ring verstehen wir einen kommutativen Ring mit Einselement, das vom Nullelement verschieden sein soll.

Ein lokaler Ring ist ein NOETHERscher Ring, dessen Nicht-

einheiten ein Ideal bilden, NAGATA [23] . Dieses Ideal $\mathfrak{A}$ ist das einzige maximale Ideal von R , und wir schreiben $(R, \mathfrak{A})$; $\mathfrak{A}$ stimmt natürlich mit dem JACOBSONschen Radikal von R überein, das ist der Durchschnitt aller maximalen Ideale von R . Unter der Dimension $\dim R$ eines lokalen Ringes $(R, \mathfrak{A})$ sei die KRULLsche Dimension von R verstanden, die mit dem Rang von $\mathfrak{A}$ übereinstimmt. $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2$ ist ein Vektorraum über dem Körper $R/\mathfrak{A}$. Die Dimension von $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2$ wird Einbettungsdimension $\text{emdim } R$ von $(R, \mathfrak{A})$ genannt. Im allgemeinen ist $\text{emdim } R \geq \dim R$. $(R, \mathfrak{A})$ heißt regulär, wenn $\text{emdim } R$ und $\dim R$ übereinstimmen. Nach dem KRULLschen Lemma gilt in jedem lokalen Ring $(R, \mathfrak{A})$:

$$\bigcap_{v=0}^{\infty} \mathfrak{A}^v = \{0\} .$$

Deshalb können wir R mit der $\mathfrak{A}$ -adischen Topologie versehen, indem wir als Umgebungsbasis von $0 \in R$ die Menge aller $\mathfrak{A}^v$ ($v=0,1,2,\dots$) wählen. Jedes Ideal von R ist in dieser Topologie abgeschlossen.

Eine kommutative NOETHERsche Algebra über dem Körper K mit Einselement nennen wir eine lokale Algebra, wenn sie genau ein maximales Ideal $\mathfrak{A}$ besitzt, und die Verkettungsabbildung $K \rightarrow A \rightarrow A/\mathfrak{A}$ ein Isomorphismus ist. Auch für lokale Algebren schreiben wir $(A, \mathfrak{A})$. Es gilt $A = \mathfrak{A} + K$.

Unter einem Algebra-Homomorphismus $\varphi : A \rightarrow B$ von Algebren über dem gleichen Körper K verstehen wir einen nichttrivialen Homomorphismus, d.h. $\varphi(1) = 1$ und $\varphi(\alpha a_1 + a_2 a_3) = \alpha \varphi(a_1) + \varphi(a_2) \varphi(a_3)$ für alle $\alpha \in K$ und $a_1 \in A$. ---

Ist $\varphi : A \rightarrow B$ ein Algebra-Homomorphismus für lokale Algebren $(A, \mathfrak{A})$ und $(B, \mathfrak{B})$ über dem Körper K , so gilt :

$\varphi(\mathfrak{a}) \subset \mathfrak{b}$.

φ induziert deshalb Abbildungen $\tilde{\varphi} : \mathfrak{a} \rightarrow \mathfrak{b}$, $a \rightsquigarrow \varphi(a)$ und $\delta\varphi : \mathfrak{a}/\mathfrak{a}^2 \rightarrow \mathfrak{b}/\mathfrak{b}^2$, $a \bmod \mathfrak{a}^2 \rightsquigarrow \varphi(a) \bmod \mathfrak{b}^2$. Es gilt :

(1.2) Hilfssatz.

Ist eine der Abbildungen φ , $\tilde{\varphi}$ und $\delta\varphi$ surjektiv, so gilt das für alle drei . ---

Die einzige bemerkenswerte Feststellung ist hierbei, daß φ und $\tilde{\varphi}$ surjektiv sind, falls dies für $\delta\varphi$ der Fall ist. Der Beweis folgt unmittelbar aus dem folgenden Lemma von KRULL und AZUMAYA, vgl. mit NAGATA [23, Chap. I, th 4.1] :

Ist $\mathfrak{A}$ das JACOBSONsche Radikal eines Ringes R und M ein endlicher R -Modul, N ein Untermodul von M mit $M = \mathfrak{A}M + N$, so ist $M = N$. ---

Eine weitere Folgerung aus diesem Lemma ist die Aussage [23, 5.1] :

Die Elemente $r_1, \dots, r_k \in R$ erzeugen genau dann das maximale Ideal $\mathfrak{A}$ des lokalen Ringes R , wenn die Restklassen $r_k + \mathfrak{A}^2$ ($k=1, \dots, k$) den Vektorraum $\mathfrak{A}/\mathfrak{A}^2$ über dem Körper $K = R/\mathfrak{A}$ erzeugen . ---

In der Garbentheorie wollen wir uns an die Terminologie von GRAUERT und REMMERT halten, siehe [15] und [18] .

Ein topologischer Raum X heißt (komplex-)algebrierter Raum, wenn auf X eine Garbe lokaler Algebren über $\mathbb{C}$ ausgezeichnet ist. Wir schreiben $(X, \mathcal{A})$ oder einfach X . Eine morphische Abbildung $\varphi : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ zweier algebrierter Räume $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$ ist ein Paar (f, f^*) aus einer stetigen Abbildung $f : X \rightarrow Y$ und einem Garbenhomomorphismus $f^* : X \otimes_f \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$, wobei $X \otimes_f \mathcal{B}$ die Urbildgarbe von

$\mathcal{B}$ mit den Halmen $(X \oplus_f \mathcal{B})_x := \mathcal{B}_{f(x)}$ für $x \in X$ ist; siehe [15, § 1, Def. 1] und [12, § 2, Def. 0]. f^* ist eine Familie von Algebra-Homomorphismen $f_x^* : \mathcal{B}_{f(x)} \rightarrow \mathcal{A}_x$. $\varphi = (f, f^*)$ wird bimorph genannt, wenn f topologisch und jedes f_x^* ($x \in X$) ein Algebra-Isomorphismus ist.

Die q -te Bildgarbe $\varphi_q(\mathcal{A})$ bei einer morphen Abbildung $\varphi = (f, f^*)$ von $(X, \mathcal{A})$ in $(Y, \mathcal{B})$, definiert durch das Garbendatum $\varphi_q(\mathcal{A})(U) := H^q(\overset{-1}{f}(U), \mathcal{A})$ für $U = \overset{0}{V} \subset Y$, wird stets als $\mathcal{B}$ -Modul-Garbe aufgefaßt. Die Annulatorgarbe

$\text{Ann}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})$ einer $\mathcal{A}$ -Modul-Garbe $\mathcal{M}$ ist definiert durch die Halme $\text{Ann}_{\mathcal{A}}(\mathcal{M})_x := \{s \in \mathcal{M}_x : s\mathcal{A}_x = 0\}$, $x \in X$.

Ist X eine offene Teilmenge des $\mathbb{C}^n$, so bezeichnen $\mathcal{E}_X$ und $\mathcal{O}_X$ (oder einfach $\mathcal{E}$ und $\mathcal{O}$) die Garben der Keime lokaler stetiger (komplexwertiger) bzw. holomorpher Funktionen auf X . Die Algebren $\mathcal{E}(X) = H^0(X, \mathcal{E}) = \Gamma(X, \mathcal{E})$ und $\mathcal{O}(X) = H^0(X, \mathcal{O}) = \Gamma(X, \mathcal{O})$ werden stets mit der Topologie der kompakten Konvergenz versehen. Ist $\overset{0}{n} := \mathbb{C}^{\overset{0}{n}}$, so gilt für $X = \overset{0}{X} \subset \overset{0}{\mathbb{C}^n}$:

$$\mathcal{O}_X = \overset{0}{n} | X.$$

$(X, \mathcal{O}_X)$ und $(\overset{0}{\mathbb{C}^n}, \overset{0}{n})$ sind komplex-algebrierte Räume. Morphismen Abbildungen $(f, f^*) : (X, \mathcal{O}_X) \rightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ werden holomorph genannt und sind stets allein durch die stetige Abbildung $f : X \rightarrow Y$ bestimmt, weil (f, f^*) genau dann morph ist, wenn für jedes $f' \in \overset{0}{Y}(V)$ mit $V = \overset{0}{V} \subset Y$ gilt:

$$f' \circ f \in \overset{-1}{X}(\overset{0}{f}(V)).$$

Z sei stets die offene Einheitskreisscheibe in der komplexen Ebene: $Z := \{x \in \mathbb{C} : |x| < 1\}$. ---

§ 2. Komplexe Räume, Definitionen.

Auf einer analytischen Menge A in einem Gebiet G eines $\mathbb{C}^n$ wird üblicherweise die folgende komplexe Struktur eingeführt: A^I sei die Idealgarbe von A , d.h. für eine offene Teilmenge $U \subset G$ sei $A^I(U) := \{f \in \mathcal{O}_G(U) : f|_A = 0\}$. $A^0 := (\mathcal{O}_G/A^I)|_A$ ist dann eine Garbe komplexer lokaler Algebren auf A , (A, A^0) ist ein algebrierter Raum.

Ein wichtiges Kennzeichen dieses algebrierten Raumes ist es, daß A^0 eine kohärente A^0 -Garbe ist, u.a. weil A^I eine kohärente $\mathcal{O}_G$ -Garbe auf G ist (H.CARTAN [6] und K.OKA [25,VII]) mit dem Nullstellengebilde $V(A^I) = A$.

$$V(A^I) := \{x \in G : A^I_x \neq \mathcal{O}_x\}.$$

Diese Aussage legt die folgende Begriffsbildung nahe, vgl. mit H.GRAUERT [15, § 1] :

Definition.

Ein algebrierter Raum $(X, \mathcal{A})$ heißt ein "komplexer Raum" (im Sinne von GRAUERT), wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (a) X ist ein HAUSDORFF-Raum .
- (b) Zu jedem Punkt $x \in X$ gibt es eine offene Umgebung $U \subset X$ ("Koordinatenumgebung") und eine bimorphe Abbildung

$$(\tau, \tau^*) : (U, \mathcal{A}|_U) \rightarrow (A, A^0),$$

wobei (A, A^0) ein algebrierter Raum der folgenden Gestalt ist: A ist eine analytische Menge in einem Gebiet G eines $\mathbb{C}^n$. $A^0 := (\mathcal{O}_G/A^I)|_A$ für eine kohärente Idealgarbe $A^I \subset \mathcal{O}_G$ mit $V(A^I) = A$. $\tau : U \rightarrow A$ wird durch n Schnitte $f_1, \dots, f_n$ aus $H^0(U, \mathcal{A})$ induziert. $\{f_1, \dots, f_n\}$ wird "Koordinatensystem"

(für die Umgebung U von x) genannt. ---

Alle Paare $(A, \mathcal{A})$ und $(A, \mathcal{A}^0)$, wie vorher definiert, sind also komplexe Räume dieser Art. Jeder komplexe Raum im Sinne von SERRE [30] ($\mathcal{S}$ -Raum bei GRAUERT-REMMERT [19] genannt) ist ein solcher Raum.

Bemerkenswert ist, daß die Halme $\mathcal{A}_x = G^0 \tau(x) / I \tau(x)$ nilpotente Elemente enthalten, wenn $I \tau(x)$ von $A^I \tau(x)$ verschieden ist. Bezeichnet $\mathcal{N}$ die Garbe der nilpotenten Elemente von $\mathcal{A}$, so ist für $\mathcal{A}_T := \mathcal{A} / \mathcal{N} (\mathcal{N}_x = A^I \tau(x) / I \tau(x))$ das Paar $(X, \mathcal{A}_T)$ ein komplexer Raum im Sinne von SERRE, der die "Reduktion" von $(X, \mathcal{A})$ genannt wird. Es gilt :

$$(\mathcal{A}_T)_x = \mathcal{A}_x / \mathcal{N}_x = (G^0 \tau(x) / A^I \tau(x)) .$$

Die natürliche morphische Abbildung

$$(id_X, red) : (X, \mathcal{A}_T) \rightarrow (X, \mathcal{A}) ,$$

$$red_x : \mathcal{A}_x \rightarrow (\mathcal{A}_T)_x , \alpha \rightsquigarrow \alpha \bmod \mathcal{N}_x ,$$

wird "Reduktionsabbildung" genannt.

Komplexe Räume sollen stets solche im Sinne von GRAUERT sein, wie gerade definiert wurde. SERRESche Räume werden wir "reduziert" nennen. Holomorphe (bzw. biholomorphe) Abbildungen seien morphische (bzw. bimorphe) Abbildungen zwischen komplexen Räumen, $(\tau, \tau^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$.

Definition.

Ist $(X, \mathcal{A})$ ein komplexer Raum, so ist jeder Halm $\mathcal{A}_x$ eine lokale Algebra über $\mathbb{C}$. Die KRULLsche Dimension von $\mathcal{A}_x$ werde "komplexe Dimension von X im Punkte x " genannt und mit $\dim_x X$ bezeichnet. $\dim X := \sup_{x \in X} \dim_x X$ heiße

die "komplexe Dimension von X ". Die Einbettungsdimension von $\mathcal{A}_x$ heiße "Einbettungsdimension von $(X, \mathcal{A})$ im Punkte x ", in Zeichen $\text{emdim}_x(X, \mathcal{A})$; $\sup_{x \in X} \text{emdim}_x(X, \mathcal{A}) =: \text{emdim}(X, \mathcal{A})$ sei die "Einbettungsdimension von $(X, \mathcal{A})$ ". $\text{emdim}(X, \mathcal{A}) = m$ bedeutet, daß $(X, \mathcal{A})$ lokal (i.a. aber nicht global) auf lokal-analytische Mengen des $\mathbb{C}^m$ biholomorph abgebildet werden kann, siehe GRAUERT [16] .

Die Bezeichnung $\dim_x X$ ohne Erwähnung der Garbe $\mathcal{A}$ (im Gegensatz zu $\text{emdim}_x(X, \mathcal{A})$) soll andeuten, daß $\dim_x X$ allein vom topologischen Raum X abhängt. $2 \cdot \dim_x X$ stimmt mit der topologischen Dimension von X im Punkte x überein. Speziell haben $(X, \mathcal{A})$ und $(X, \mathcal{A}_x)$ die gleiche (komplexe) Dimension. Die Einbettungsdimension hängt natürlich von der Struktur $\mathcal{A}$ auf X ab. Es gibt sogar auf jedem nichtkompakten komplexen Raum X eine Strukturgarbe $\tilde{\mathcal{A}}$, so daß $\text{emdim}(X, \tilde{\mathcal{A}})$ beliebig groß ist. Beispiel, vgl. O.FORSTER [10, Satz 2.2] :

$(X, \mathcal{A})$ sei ein komplexer Raum, $\mathcal{M}$ eine kohärente $\mathcal{A}$ -Modulgarbe. $\tilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \dot{+} \mathcal{M}$. Dann ist $(X, \tilde{\mathcal{A}})$ ein komplexer Raum mit $\text{emdim}_x(X, \tilde{\mathcal{A}}) = \text{emdim}_x(X, \mathcal{A}) + \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}_x / \alpha_x \mathcal{M}_x)$ für alle $x \in X$, wenn α_x das maximale Ideal von $\mathcal{A}_x$ ist. Für nichtkompaktes X wählen wir eine Punktfolge $x_1, x_2, \dots$ aus X ohne Häufungspunkt und definieren $\mathcal{M}(U) = \bigoplus_{x_v \in U} \mathbb{C}^v$, $U = \overset{\circ}{U} \subset X$. Für f aus $\mathcal{A}(U)$ und $(\alpha_{x_v})_{x_v \in U} = \alpha \in \mathcal{M}(U)$ sei $f \cdot \alpha := (f(x_v) \cdot \alpha_{x_v})_{x_v \in U}$. Dann ist $\mathcal{M}$ eine kohärente $\mathcal{A}$ -Modulgarbe mit $\text{emdim}(X, \mathcal{A} \dot{+} \mathcal{M}) = \infty$. ---

Ist $\text{emdim}_x(X, \mathcal{A}) = m < \infty$ für einen komplexen Raum $(X, \mathcal{A})$, so gibt es eine offene Umgebung $U \subset X$ von x und holomorphe Schnitte $f_1, \dots, f_m \in H^0(U, \mathcal{A})$, die für U ein Koordinatensystem bilden.

Die Gesamtheit der globalen Schnitte $A := H^0(X, \mathcal{A}) \cong \mathcal{A}(X) \cong \Gamma(X, \mathcal{A})$ eines komplexen Raumes $(X, \mathcal{A})$ ist eine Algebra über dem Körper $\mathbb{C}$. Die Elemente $f \in A$ werden holomorphe Funktionen auf $(X, \mathcal{A})$ genannt, obwohl sie keine Abbildungen von X in die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ sind. Allerdings induziert die Reduktions-Abbildung $(\text{id}_X, \text{red}) : (X, \mathcal{A}_r) \rightarrow (X, \mathcal{A})$ einen kanonischen Algebra-Homomorphismus $\varrho : A \rightarrow H := H^0(X, \mathcal{A}_r)$. Jeder holomorphen Funktion f auf $(X, \mathcal{A})$ kann also eine stetige Funktion ϱf zugeordnet werden. Wir nennen $(\varrho f)(x)$ die Funktionswerte von f . Doch ist eine holomorphe Funktion aus A nicht allein durch ihre Funktionswerte bestimmt, weil ϱ im allgemeinen nicht injektiv ist.

Definition.

Eine Teilmenge M eines komplexen Raumes $(X, \mathcal{A})$ heiße "lokal-analytisch", wenn es zu jedem Punkt $x \in X$ ($x \in M$) eine offene Umgebung U und holomorphe Funktionen f_i aus $H^0(U, \mathcal{A})$, $i \in I$, gibt, so daß gilt :

$$U \cap M = \bigcap_{i \in I} \{x \in U : f_i(x) = 0\} = \bigcap_{i \in I} f_i^{-1}(0) .$$

Jede abgeschlossene lokal-analytische Menge ist analytisch.

Ein komplexer Raum $(M, \mathcal{M})$ heiße "Unterraum" von $(X, \mathcal{A})$ - in Zeichen $(M, \mathcal{M}) \subset (X, \mathcal{A})$ -, wenn M eine analytische Teilmenge von X und $\mathcal{M} = (\mathcal{A}/I)|_M$ für eine kohärente Idealgarbe $I \subset \mathcal{A}$ mit $V(I) = M$ ist. Die "Injektion"

$(j, j^*) : (M, \mathcal{M}) \rightarrow (X, \mathcal{A})$ ist eine holomorphe Abbildung :

$$j : M \rightarrow X, \quad x \rightsquigarrow x ,$$

$$j_x : \mathcal{A}_x \rightarrow \mathcal{M}_x, \quad f \rightsquigarrow f \bmod I_x \quad (x \in M) . \quad -$$

M ist genau dann eine analytische Teilmenge bzgl. $(X, \mathcal{A})$, wenn das für die Reduktion der Fall ist. Nach R.REMMERT [27] und [28] sind im reduzierten Fall die Bilder analyti-

scher Mengen bei eigentlichen holomorphen Abbildungen wieder analytische Mengen. Diese Aussage gilt auch für beliebige komplexe Räume.

Wir betrachten eine holomorphe Abbildung

$$(\tau, \tau^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B}) .$$

Bekanntlich kann jede Faser $\tau^{-1}(\tau(x))$, $x \in X$, mit der trivialen Struktur $\mathcal{F}$ und mit einer von (τ, τ^*) in natürlicher Weise abhängenden komplexen Struktur $\mathcal{G}$ versehen werden, siehe GRAUERT-KERNER [17, § 2.1] :

$M := \tau^{-1}(\tau(x))$ ist eine analytische Menge in X , und die Garbe ${}_M I$ aller auf M verschwindenden holomorphen Funktionskeime von $(X, \mathcal{A})$ ist eine kohärente Idealgarbe von $\mathcal{A}$ mit $V({}_M I) = M$. $\mathcal{F} := (\mathcal{A}/{}_M I)|_M$ macht $(M, \mathcal{F})$ zu einem reduzierten komplexen Raum, $(M, \mathcal{F}) \subset (X, \mathcal{A})$.

Ist $\tilde{\tau}_x : \mathcal{B}_{\tau(x)} \rightarrow \mathcal{A}_x$ die nach Hilfssatz (1.2) von $\tau^* : \mathcal{B}_{\tau(x)} \rightarrow \mathcal{A}_x$ induzierte Abbildung, $x \in X$, so setzen wir $I_x := \tilde{\tau}_x(\mathcal{B}_{\tau(x)}) \cdot \mathcal{A}_x \subset \mathcal{A}_x \subset \mathcal{A}_x$, und I ist eine kohärente auf M verschwindende Idealuntergarbe von $\mathcal{A}$, weil sie die Urbildgarbe (bei τ), siehe [18], von $J \subset \mathcal{B}$, $J_y = \mathcal{B}_y$ für $y \neq \tau(x)$ und $J_y = \mathcal{B}_{\tau(x)}$ für $y = \tau(x)$, ist. Mit $\mathcal{G} := (\mathcal{A}/I)|_M$, genannt die " τ -Struktur der Faser" M , ist $(M, \mathcal{G})$ ebenfalls ein Unterraum von $(X, \mathcal{A})$, vgl. dazu auch mit §6.

Definition.

Eine holomorphe Abbildung $(\tau, \tau^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ heißt "regulär im Punkte $x \in X$ ", wenn $\tau_x^* : \mathcal{B}_{\tau(x)} \rightarrow \mathcal{A}_x$ surjektiv ist. (τ, τ^*) ist regulär in $X' \subset X$, wenn das in jedem Punkt aus X' der Fall ist. (τ, τ^*) wird "Einbettungsabbildung" genannt, wenn sie sich auf folgende Weise faktorisieren läßt :

$(\tau, \tau^*) = (j, j^*) \circ (\hat{\tau}, \hat{\tau}^*)$, dh. $\tau = j \circ \hat{\tau}$ und $\tau^* = \hat{\tau}^* \circ j^*$, mit einer biholomorphen Abbildung
 $(\hat{\tau}, \hat{\tau}^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (M, \mathcal{M}) \subset (Y, \mathcal{B})$, $\hat{\tau} : X \rightarrow M$, $x \rightsquigarrow \tau(x)$,
 $\hat{\tau}_x^* : \mathcal{M}_{\tau(x)} = \mathcal{B}_{\tau(x)} / I_{\tau(x)} \rightarrow \mathcal{A}_x$, $f \bmod I_{\tau(x)} \rightsquigarrow \tau_x^*(f)$,
 und der Injektion $(j, j^*) : (M, \mathcal{M}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$.

Ist B eine Teilmenge von $A = H^0(X, \mathcal{A})$, so definiert

$$\mathcal{B} = (f)_{f \in B} : X \rightarrow \mathbb{C}^B, x \rightsquigarrow (f(x))_{f \in B},$$

eine stetige Abbildung. $\mathcal{B}$ heißt "regulär in $x \in X$ ", wenn die Keime $f - f(x)$ für $f \in B$ den ganzen Halm $\mathcal{A}_x$ erzeugen, dh. es gibt endlich viele Funktionen $f_1, \dots, f_k \in B$, so daß $\mathcal{A}_x$ mit der von der Menge aller konvergenten

$$\sum_{v_1 \dots v_k=0}^{\infty} a_{v_1 \dots v_k} (f_1 - f_1(x))^{v_1} \dots (f_k - f_k(x))^{v_k}, \quad a_{v_1 \dots v_k} \in \mathbb{C},$$

erzeugten Algebra übereinstimmt.

$\mathcal{B}$ ist regulär in $X' \subset X$, wenn $\mathcal{B}$ in jedem Punkt aus X' regulär ist. ---

Eine Einbettungsabbildung muß natürlich regulär sein. Die Reduktionsabbildung ist regulär, sie ist sogar eine Einbettungsabbildung.

Im endlichen Fall $B = \{f_1, \dots, f_k\}$ induziert die Verbindung $f = (f_1, \dots, f_k) : X \rightarrow \mathbb{C}^k$ eine holomorphe Abbildung $(g_f, f^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{C}^k, \mathcal{O})$ durch die Festsetzung :

$$f_x^* : \mathcal{O}_{g_f(x)} \cong \mathbb{C}[\langle z_1 - f_1(x), \dots, z_k - f_k(x) \rangle] \rightarrow \mathcal{A}_x,$$

$$\sum_{v_1 \dots v_k=0}^{\infty} a_{v_1 \dots v_k} \prod_{k=1}^k (z_k - f_k(x))^{v_k} \rightsquigarrow$$

$$\sum_{v_1 \dots v_k=0}^{\infty} a_{v_1 \dots v_k} \prod_{k=1}^k (f_k - f_k(x))^{v_k}.$$

Die in der Definition angegebenen Bedingungen der Regularität sind also verträglich.

Ist eine holomorphe Abbildung $(\tau, \tau^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ regulär in einem Punkte $x \in X$, so gibt es eine Umgebung U von x , so daß (τ, τ^*) in U regulär ist. U kann so klein gewählt werden, daß $(\tau, \tau^*) : (U, \mathcal{A}|_U) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ eine Einbettungsabbildung ist, siehe GRAUERT [16, § 1, (1)] .

Definition.

$(X, \mathcal{A})$ sei ein komplexer Raum mit $A = H^0(X, \mathcal{A})$.

$\alpha : X \rightarrow \mathbb{C}^A$, $x \rightsquigarrow (f(x))_{f \in A}$, ist eine stetige Abbildung.

$(X, \mathcal{A})$ heißt

wenn α

(a) "schwach-holomorph-konvex", fasteigentlich ,

(b) "holomorph-konvex", eigentlich ,

(c) "holomorph-ausbreitbar"

oder K-vollständig , diskret ,

(d) "holomorph-separabel", injektiv ,

(e) "holomorph-vollständig" fasteigentlich

oder STEINSch , und diskret

ist.

(f) Wir sagen außerdem, $(X, \mathcal{A})$ besitzt "lokale Koordinaten durch globale Funktionen", wenn α regulär ist . ---

Diese Bezeichnungen sind äquivalent mit den üblichen, wie sie von K.STEIN [31], H.CARTAN [8], H.GRAUERT [13] und auch E.BISHOP [1] (schwach-holomorph-konvex) angegeben werden. Denn die A -Hülle

$$\hat{K} := \{x \in X \mid |f(x)| \leq \sup |f(K)| \text{ für alle } f \in A\}$$

einer Menge $K \subset X$ stimmt mit

$$\bar{\alpha}^{-1}(\prod_{f \in A} \text{pr}_f(\alpha(K)))$$

überein; und die Menge $M \subset \mathbb{C}^A$ ist genau dann kompakt, wenn alle Projektionen $\text{pr}_f(M) \subset \mathbb{C}$, $f \in A$, kompakt sind. Damit sind die Definitionen (a) und (b) auf die üblichen zurückgeführt.

Die Fasern von α haben die Gestalt

$$\bar{\alpha}^{-1}(\alpha(x)) = \bigcap_{f \in A} \bar{f}^{-1}(f(x)),$$

darum sind auch (c) und (d) klar.

Schließlich ist die Regularität von α so definiert worden, daß es im Fall (f) zu jedem Punkt $x \in X$ eine offene Umgebung U und endlich viele Funktionen $f_1, \dots, f_k$ aus A gibt, die eine reguläre Abbildung

$$(gf, f^*) : (U, \mathcal{A}|U) \rightarrow (\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^0)$$

induzieren.

Jede der Bedingungen (a) bis (e) ist genau dann für einen komplexen Raum erfüllt, wenn es für die Reduktion der Fall ist. Holomorph-ausbreitbare komplexe Räume mit höchstens abzählbar vielen Zusammenhangskomponenten besitzen abzählbare Topologie, nach GRAUERT [13]. Für STEINSche Räume gelten wie im reduzierten Fall die Theoreme A und B von CARTAN und SERRE - [7] und [8] -, auch das hat GRAUERT [15] bewiesen. Ist $(X, \mathcal{A})$ holomorph-separabel oder besitzt $(X, \mathcal{A})$ lokale Koordinaten durch globale Funktionen, so ist $(X, \mathcal{A})$ auch holomorph-ausbreitbar.

Jeder holomorph-vollständige komplexe Raum ist holomorph-separabel, holomorph-konvex und besitzt lokale Koordinaten durch globale Funktionen. Das können wir leicht nachweisen,

indem wir den Arbeiten von H.GRAUERT [13] und K.STEIN [32] folgen. Den allgemeinen Fall können wir ohne Mühe auf den endlich-dimensionalen zurückführen, indem wir den komplexen Raum in seine irreduziblen Komponenten zerlegen. Wir wollen zunächst zeigen, daß ein n -dimensionaler schwach-holomorph-konvexer Raum $(X, \mathcal{O})$ mit abzählbarer Topologie durch holomorph-vollständige Teilmengen ausgeschöpft werden kann, wenn er holomorph-ausbreitbar ist. Es genügt, zu jeder kompakten Menge $K \subset X$ eine holomorph-vollständige Umgebung $Y \subset X$ zu konstruieren, weil X durch kompakte Mengen $K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset X$ ausgeschöpft werden kann. Nach dem später bewiesenen Satz (5.1) gibt es eine fasteigentliche holomorphe Abbildung $f : X \rightarrow \mathbb{C}^n$; wir wählen einen (offenen) Polyzylinder $Z \subset \mathbb{C}^n$, der $f(K)$ umfaßt. Dann gilt für jede kompakte Menge $L \subset Z$ die Beziehung $f(L) \subset f(Z) \subset f(\bar{Z})$. $f(Z)$ und $f(\bar{Z})$ zerfallen in relativ-kompakte offene (bzw. kompakte) Zusammenhangskomponenten U_α und V_α . Jedes U_α ist in genau einem V_α enthalten. Die U_α bilden eine offene Überdeckung von K ; K ist kompakt; also ist $K \subset (U_1 \cup \dots \cup U_1)$ für gewisse U_α . Die Menge

$$V := \bigcup_{\alpha=1}^1 V_\alpha$$

ist kompakt, und es gilt: $Y := \bigcup_{U_\alpha \subset V} U_\alpha = f^{-1}(Z) \cap V$.

Die Abbildung $f|_Y : Y \rightarrow Z$ ist eigentlich, denn für jede kompakte Menge $L \subset Z$ ist $f(L) \cap Y = f(L) \cap f(Z) \cap V = f(L) \cap V$ kompakt. Deshalb ist Y holomorph-konvex und holomorph-ausbreitbar.

Wir haben also für jeden (n -dimensionalen) holomorph-ausbreitbaren schwach-holomorph-konvexen Raum $(X, \mathcal{O})$ eine Ausschöpfung $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X$

durch holomorph-vollständige (= holomorph-ausbreitbare und holomorph-konvexe) offene Mengen gefunden, so daß X_V jeweils holomorph-konvex bzgl. X_{V+1} ist. Also ist X selbst holomorph-konvex : K.STEIN [32, Satz 1.2] .

Wir wollen nur komplexe Räume mit höchstens abzählbar vielen Zusammenhangskomponenten betrachten.

Bemerkungen.

$(\tau, \tau^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ sei eine holomorphe Abbildung komplexer Räume $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$.

Ist $(Y, \mathcal{B})$ (schwach-)holomorph-konvex und $\tau : X \rightarrow Y$ (fast-)eigentlich, so ist auch $(X, \mathcal{A})$ (schwach-)holomorph-konvex.

Ist $(Y, \mathcal{B})$ holomorph-ausbreitbar (-separabel) und τ diskret (injektiv) , so ist auch $(X, \mathcal{A})$ holomorph-ausbreitbar (-separabel) .

Besitzt $(Y, \mathcal{B})$ lokale Koordinaten durch globale Funktionen, und ist (τ, τ^*) regulär, so besitzt auch $(X, \mathcal{A})$ lokale Koordinaten durch globale Funktionen . ---

Ist $(X, \mathcal{A})$ ein Unterraum des komplexen Raumes $(Y, \mathcal{B})$, so ist $(X, \mathcal{A})$ holomorph-ausbreitbar (holomorph-separabel, schwach-holomorph-konvex, holomorph-konvex, holomorph-vollständig oder besitzt lokale Koordinaten durch globale Funktionen, wenn es für $(Y, \mathcal{B})$ der Fall ist.

Auf der Menge $A := H^0(X, \mathcal{A})$ aller holomorphen Funktionen eines komplexen Raumes $(X, \mathcal{A})$ mit abzählbarer Topologie wollen wir nach H.GRAUERT [15, § 2.6] eine Topologie einführen, so daß A eine topologische Algebra wird. Genauer gesagt : $\mathcal{A}$ soll die Struktur einer FRÉCHET-Garbe erhalten, d.h. für offene Mengen $W \subset X$ sind die Schnittmengen

$H^0(W, \mathcal{A})$ lokal-konvexe, metrisierbare, vollständige, topologische Vektorräume (= FRÉCHET-Räume), so daß die Beschränkungshomomorphismen stetige Abbildungen sind :

$(U_V)_{V \in \mathbb{N}}$ sei eine Basis der Topologie auf X , so daß jeder komplexe Raum $(U_V, \mathcal{A}|_{U_V})$ biholomorph auf einen Unterraum $(M, \mathcal{M}) \subset (G, \mathcal{G}^0)$ abgebildet wird, wobei G ein holomorph-vollständiges Gebiet in einem $\mathbb{C}^1$ und $\mathcal{M} = (\mathcal{G}^0/I)|_M$ für eine kohärente Idealgarbe $I \subset \mathcal{G}^0$ mit der Nullstellenmenge M ist. Wegen Theorem B für $(G, \mathcal{G}^0)$ gilt:

$$H^0(U_V, \mathcal{A}|_{U_V}) = H^0(M, \mathcal{M}) = H^0(G, \mathcal{G}^0)/H^0(G, I) .$$

Mit der Topologie der kompakten Konvergenz versehen ist $H^0(G, \mathcal{G}^0)$ ein FRÉCHET-Raum, $H^0(G, I)$ ein abgeschlossener Untervektorraum. Deshalb sind nach BOURBAKI [4, Chap. II, § 2, n° 1] auch $H^0(M, \mathcal{M})$ und $H^0(U_V, \mathcal{A}|_{U_V})$ FRÉCHET-Räume. Für beliebiges $W = W \subset X$ wird $H^0(W, \mathcal{A})$ mit der größten Topologie versehen, die alle Abbildungen

$$H^0(W, \mathcal{A}) \rightarrow H^0(U_V, \mathcal{A}) \text{ stetig macht } (U_V \subset W) .$$

Diese Topologie ist unabhängig von der Wahl der U_V , M , G usw. . Sie stimmt mit der Topologie der kompakten Konvergenz überein, wenn $(X, \mathcal{A})$ reduziert ist.

Wie wir schon feststellten, ist die Reduktions-Abbildung $(\text{id}_X, \text{red}) : (X, \mathcal{A}_r) \rightarrow (X, \mathcal{A})$ eines komplexen Raumes $(X, \mathcal{A})$ regulär. Die Garbe $\mathcal{N}$ der nilpotenten Elemente ist nach H.GRAUERT [15] kohärent. Aus Theorem B [8] folgt deshalb $H^p(X, \mathcal{N}) = 0$ für alle $p > 0$, wenn $(X, \mathcal{A})$ holomorph-vollständig ist. Die Garbensequenz

$$0 \rightarrow \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_r \rightarrow 0$$

ist exakt, also auch die Cohomologiesequenz

$$0 \rightarrow H^0(X, \mathcal{N}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{A}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{A}_r) \rightarrow H^1(X, \mathcal{N}) = 0 .$$

Wir haben deshalb die folgende Aussage bewiesen, wenn wir den Satz von BANACH auf die FRÉCHET-Räume $H^0(X, \mathcal{A})$ und $H^0(X, \mathcal{A}_r)$ anwenden :

(2.1) Satz.

Ist $(X, \mathcal{A})$ ein holomorph-vollständiger komplexer Raum, so induziert die Reduktionsabbildung (id_X, red) einen stetigen, offenen und surjektiven Algebra-Homomorphismus

$$\mathcal{S} : H^0(X, \mathcal{A}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{A}_r) . ---$$

Der Vollständigkeit halber wollen wir noch eine weitere Aussage beweisen, die für die komplexe Ebene als "Satz von MONTEL" bekannt ist, und dort besagt, daß jede beschränkte Familie holomorpher Funktionen auf einem Gebiet aus $\mathbb{C}$ normal ist : jede nichtendliche Teilmenge enthält eine kompakt-konvergente Folge. Eine Verallgemeinerung auf Gebiete im $\mathbb{C}^n$ ist offensichtlich. Wir zeigen sogar :

(2.2) Satz.

Ist $(X, \mathcal{A})$ ein komplexer Raum mit abzählbarer Topologie, so ist $A := H^0(X, \mathcal{A})$ ein MONTELScher Raum . ---

Ein MONTELScher Raum [3, Chap. IV, § 3, n° 4] ist ein lokal-konvexer, tonnelierter, HAUSDORFFscher topologischer Vektorraum, in dem jede beschränkte Menge relativ-kompakt ist. Weil X vom abzählbaren Typ ist, ist A ein lokal-konvexer, metrisierbarer, vollständiger topologischer Vektorraum (FRÉCHET-Raum), speziell BAIREsch (nach § 1) und deshalb tonneliert [3, Chap. III, § 1, prop. 1]. Da A metrisierbar ist, haben wir einen normalen, insbesondere HAUSDORFFschen Raum. Es bleibt also allein zu zeigen, daß jede beschränkte Teilmenge A' von A relativ-kompakt ist.

Es gibt eine lokal-endliche, abzählbare und offene Überdek-

kung $(U_v)_{v \in \mathbb{N}}$ von X , so daß gilt :

$$H^0(U_v, \mathcal{A}) = H^0(M_v, \mathcal{M}_v) = H^0(Z_v, Z_v^0) / H^0(Z_v, I_v)$$

für analytische Mengen M_v in Polyzylindern Z_v von $\mathbb{C}^{n_v}$ und $\mathcal{M}_v = Z_v^0 / I_v$, falls $I_v \subset Z_v^0$ kohärente Idealgarben mit M_v als Nullstellenmengen sind.

Die Topologie auf A ist gerade so eingeführt worden, daß eine Folge $f_0, f_1, f_2, \dots \in A$ genau dann konvergiert, wenn sie in allen $H^0(M_v, \mathcal{M}_v)$ konvergiert ($v \in \mathbb{N}$). Bezeichnet

$$\gamma_v : A \rightarrow H^0(M_v, \mathcal{M}_v), \quad f \leadsto f|_{M_v},$$

die Beschränkungsabbildung, so ist $A' \subset A$ genau dann beschränkt (bzw. relativ-kompakt), wenn alle $A'_v := \gamma_v(A')$ in $H^0(M_v, \mathcal{M}_v)$ beschränkt (relativ-kompakt) sind, siehe [3] und [4]. Die kanonischen Projektionsabbildungen

$$\pi_v : H^0(Z_v, Z_v^0) \rightarrow H^0(M_v, \mathcal{M}_v) \quad (v \in \mathbb{N})$$

sind stetig, surjektiv und linear. Deshalb können wir nach dem Satz von BANACH konzentrische Polyzylinder $\tilde{Z}_v \subset Z_v$ so wählen, daß beschränkte Mengen $\tilde{A}_v \subset H^0(\tilde{Z}_v, Z_v^0)$ existieren mit $\tilde{\pi}_v(\tilde{A}_v) = A'_v|_{(M_v \cap \tilde{Z}_v)}$. Die $\tilde{A}_v$ sind relativ-kompakt, weil in $\mathbb{C}^{n_v}$ der Satz von MONTEL richtig ist. Die $\tilde{Z}_v$ können noch so groß gewählt werden, daß $X = \bigcup_v (M_v \cap \tilde{Z}_v)$ ist. Dann haben wir aber auch

$$\tilde{\gamma}_v(A') = A'_v|_{(M_v \cap \tilde{Z}_v)}.$$

Die $\tilde{\pi}_v(\tilde{A}_v) = A'_v|_{(M_v \cap \tilde{Z}_v)}$ sind relativ-kompakt, weil alle $\tilde{\pi}_v$ stetig sind. Daher ist auch $A' \subset A$ relativ-kompakt; q.e.d.

Jeder FRECHET-MONTEL-Raum besitzt abzählbare Topologie, siehe BOURBAKI [3, Chap. IV, § 3, exerc. 28 b].

Sind $(X_i, \mathcal{A}_i)$ ($i=1,2$) komplexe Räume, so können wir nach H.GRAUFERT [15] auf dem topologischen Produktraum X von X_1 und X_2 eine komplexe Struktur definieren. Es sei U_i offen in X_i mit

$$(U_i, \mathcal{A}_i|_{U_i}) \subset (Z^{n_i}, \mathcal{I}_{n_i}^0), \quad \mathcal{A}_i|_{U_i} = (\mathcal{I}_{n_i}^0 / \mathcal{I}_i) |_{U_i}.$$

Für $z_i \in Z^{n_i}$ können die Ideale $\mathcal{I}_{z_i}$ als Teilmengen $\mathcal{I}_{z_i}^0$ von $\mathcal{I}_{n_i}^0$ betrachtet werden ($n := n_1 + n_2$ und $z := (z_1, z_2)$). $\mathcal{I}_z$ sei das von $\mathcal{I}_{z_1}$ und $\mathcal{I}_{z_2}$ in $\mathcal{I}_n^0$ erzeugte Ideal. $\mathcal{I}$ ist eine kohärente Idealgarbe von $\mathcal{I}_n^0$ mit $(U_1 \times U_2) =: U$ als Nullstellenmenge. Also definiert $\mathcal{B} := (\mathcal{I}_n^0 / \mathcal{I})|_U$ eine komplexe Struktur auf $U \subset X$; den Halm $\mathcal{B}_z$ nennt NAGATA [23, § 47] analytisches Tensorprodukt $\mathcal{B}_z = \mathcal{A}_{1,z_1} \hat{\otimes} \mathcal{A}_{2,z_2}$ von $\mathcal{A}_{1,z_1}$ und $\mathcal{A}_{2,z_2}$. Die auf diese Weise konstruierten komplexen Strukturen auf offenen Mengen in X sind biholomorph verträglich. Wir bezeichnen den Produktraum $(X, \mathcal{B})$ mit $(X_1, \mathcal{A}_1) \times (X_2, \mathcal{A}_2)$ oder $(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \hat{\otimes} \mathcal{A}_2)$.

Wir können auch holomorphe Projektionsabbildungen angeben:

$$\text{pr}_i : X_1 \times X_2 \rightarrow X_i, \quad x = (x_1, x_2) \rightsquigarrow x_i,$$

$$\text{pr}_i^* : \mathcal{A}_{1,x_1} \rightarrow (\mathcal{A}_1 \hat{\otimes} \mathcal{A}_2)_x, \quad f + \mathcal{I}_{x_1} \rightsquigarrow f + \mathcal{I}_x,$$

wobei $f \in \mathcal{I}_{x_1}^0$ auch als Element von $\mathcal{I}_x^0$ aufgefaßt wird.

Die von den Projektionen $(\text{pr}_i, \text{pr}_i^*)$ induzierten Abbildungen der Algebren $A_i := H^0(X_i, \mathcal{A}_i)$ und $A := H^0(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \hat{\otimes} \mathcal{A}_2)$, die wir mit $\pi_i : A_i \rightarrow A$ bezeichnen wollen, sind stetig und linear. Für $f \in A_i$ hängen die Funktionswerte von $\pi_i(f) \in A$ allein von der i -ten Koordinate x_i ab ($i=1,2$).

Für Dimension und Einbettungsdimension erhalten wir die

Gleichungen :

$$\dim_x X = \dim_{x_1} X_1 + \dim_{x_2} X_2 ,$$

$$\text{emdim}_x(X, \mathcal{A}) = \text{emdim}_{x_1}(X_1, \mathcal{A}_1) + \text{emdim}_{x_2}(X_2, \mathcal{A}_2) ,$$

$$x = (x_1, x_2) \in X = X_1 \times X_2 , \quad \mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \hat{\otimes}_x \mathcal{A}_2 .$$

Ist $(X, \mathcal{A}) \times (Y, \mathcal{B}) = (Z, \mathcal{C})$, so gilt auch

$(X, \mathcal{A}_r) \times (Y, \mathcal{B}_r) = (Z, \mathcal{C}_r)$, d.h. die hier angegebene Konstruktion des komplexen Produktraumes stimmt im reduzierten Fall mit der von SERRE [30] überein.

Es bleibt zu untersuchen, ob und wie $(X_1, \mathcal{A}_1)$ in den komplexen Raum $(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \hat{\otimes}_x \mathcal{A}_2)$ eingebettet werden kann. Wir behandeln das Problem lokal und nehmen folgende Situation an :

X_1 ist analytische Teilmenge in einem Gebiet des $\mathbb{C}^{n_1}$,

$1^0_{z_1} := n_1^0_{z_1}$ mit dem maximalen Ideal $1^{\mathcal{M}}_{z_1}$, $i=1,2$.

$\mathcal{A}_1 = (1^0/1^I) |_{X_1}$ für eine kohärente Idealgarbe $1^I \subset 1^0$ mit X_1 als Nullstellenmenge .

$0 := n^0$ für $n := n_1 + n_2$.

1_Z bezeichne das von $1^I_Z \subset 0_Z$ und $2^I_Z \subset 0_Z$ erzeugte Ideal,

$z := (z_1, z_2) = (0, 0)$ o.E.d.A. , $\mathcal{M}_Z$ das maximale Ideal von 0_Z . Wir sparen uns die rechten Indizes :

$$1^0_{z_1} = 1^0 = \mathbb{C}[\langle r_1, \dots, r_{n_1} \rangle] ,$$

$$2^0_{z_2} = 2^0 = \mathbb{C}[\langle s_1, \dots, s_{n_2} \rangle] ,$$

$$0_Z = 0 = \mathbb{C}[\langle t_1, \dots, t_n \rangle] ,$$

und können folgende Abbildungen definieren :

$$\alpha_1 : 1^0 \rightarrow 0 , \quad \sum s_1 \dots s_{n_1} r_1^{s_1} \dots r_{n_1}^{s_{n_1}} \rightsquigarrow \sum c_{v_1 \dots v_n} t_1^{v_1} \dots t_n^{v_n} ,$$

$$c_{v_1, \dots, v_{n_1} v_{n_1+1} \dots v_n} := \begin{cases} a_{v_1 \dots v_{n_1}} & \text{für } v_{n_1+1} = \dots = v_n = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

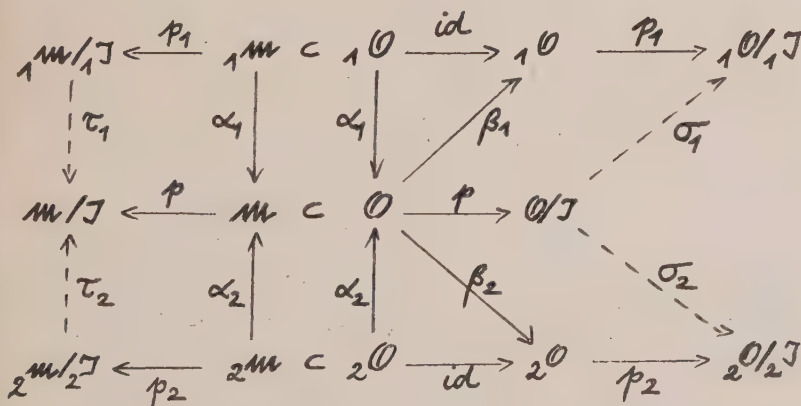
$$\alpha_2 : 2^0 \rightarrow 0, \Sigma b_{\sigma_1 \dots \sigma_{n_2}} s_1^{\sigma_1} \dots s_{n_2}^{\sigma_{n_2}} \rightsquigarrow \Sigma c_{v_1 \dots v_n} t_1^{v_1} \dots t_n^{v_n},$$

$$c_{v_1 \dots v_{n_1} v_{n_1+1} \dots v_n} := \begin{cases} b_{v_{n_1+1} \dots v_n} & \text{für } v_1 = \dots = v_{n_1} = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

$$\beta_1 : 0 \rightarrow 1^0, \Sigma c_{v_1 \dots v_n} t_1^{v_1} \dots t_n^{v_n} \rightsquigarrow \Sigma c_{v_1 \dots v_{n_1}} o \dots o r_1^{v_1} \dots r_{n_1}^{v_{n_1}},$$

$$\beta_2 : 0 \rightarrow 2^0, \Sigma c_{v_1 \dots v_n} t_1^{v_1} \dots t_n^{v_n} \rightsquigarrow \Sigma c_{o \dots o v_{n_1+1} \dots v_n} s_1^{v_1} \dots s_{n_2}^{v_{n_2}},$$

Wir betrachten das folgende Diagramm, in dem p und p_i die natürlichen Projektionen bezeichnen.



Es gilt $\beta_i(I) = {}_i I$ und $\alpha_i({}_i I) \subset I$ für $i=1,2$. Deshalb sind

$$\sigma_1 := p_1 \circ \beta_1 \circ \bar{p}^1 \quad \text{und} \quad \tau_1 := p \circ \alpha_1 \circ p_1^{-1}$$

Abbildungen, die das Diagramm kommutativ machen. Wir erhalten :

$$\begin{aligned} \sigma_2^{-1}(0) &= p_2 \circ \beta_2 \circ \bar{p}^1(0) = p_2 \circ \beta_2(2I) = p(\alpha_1(1I)) \cdot (0/I) = \\ &= \tau_1(1I) (0/I), \text{ und } \sigma_1^{-1}(0) = \tau_2(2I) (0/I). \end{aligned}$$

Andererseits ist $\sigma_2 : 0/I \rightarrow {}_2 0/{}_2 I$ eine surjektive und lineare Abbildung. Deshalb gilt nach dem Homomorphiesatz :

$${}_2 0/{}_2 I = (0/I) / \sigma_2^{-1}(0) = (0/I) / \tau_1(1I) (0/I) .$$

${}_i \mathcal{M}_{x_i} / {}_i \mathcal{I}_{x_i}$ ist genau das maximale Ideal von $\mathcal{A}_{i, x_i}$,
 $\mathcal{M}_x / \mathcal{I}_x$ das von $\mathcal{A}_x$. τ_1 stimmt mit $\text{pr}_1^* : \mathcal{M}_{i, x_i} \rightarrow \mathcal{M}_x$
 überein.

Deshalb haben wir gezeigt :

(2.3) Satz.

Es sei $(\text{pr}_1, \text{pr}_1^*) : (X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \hat{\otimes} \mathcal{A}_2) \rightarrow (X_1, \mathcal{A}_1)$ die Projektion auf die erste Koordinate und $x_2 \in X_2$ ein fester aber beliebiger Punkt. Die analytische Menge

$$X_1 \times \{x_2\} = \text{pr}_1^{-1}(\text{pr}_1(x_1, x_2)) \subset X_1 \times X_2 ,$$

für einen Punkt $x_1 \in X_1$, versehen wir mit der pr_1 -Struktur.
 $\mathcal{F}_1$.

Dann ist $(X_1 \times \{x_2\}, \mathcal{F}_1)$ biholomorph äquivalent zu
 $(X_1, \mathcal{A}_1)$.

$(X_1, \mathcal{A}_1)$ kann als Unterraum von $(X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \hat{\otimes} \mathcal{A}_2)$ aufgefaßt werden. ---

Diese Aussage gilt natürlich auch für die zweite Koordinate
 $(X_2, \mathcal{A}_2)$.

II. Topologische Gesichtspunkte.

In diesem Kapitel wollen wir für holomorphe Abbildungen $(\tau, \tau^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ nur die Eigenschaften der stetigen Abbildung $\tau : X \rightarrow Y$ betrachten. Wir beschränken uns dabei im wesentlichen auf den Fall $Y = \mathbb{C}^m$ und $\mathcal{B} = \mathcal{C}_m$ für eine natürliche Zahl m .

§ 3. Darstellungs- und Trennungssatz.

Für Anwendungen im folgenden Paragraphen wollen wir zwei interessante Sätze über endlich-dimensionale komplexe Räume $(X, \mathcal{A})$ mit abzählbarer Topologie beweisen. Es ist $A := H^0(X, \mathcal{A})$ ein vollständiger Vektorraum in der schon angegebenen Topologie.

Ist U eine offene Teilmenge von X und $M \subset U$ analytisch, so können wir M als Vereinigung $\bigcup M_\nu$ von höchstens abzählbar vielen irreduziblen Komponenten betrachten. Ist M^* eine Teilmenge von M , die aus jedem M_ν genau ein Element enthält und $N \subset (M \setminus M^*)$ eine weitere analytische Menge in U , so gilt: $\dim N < \dim M$.

Ist F ein vollständiger Untervektorraum von A , so ist die Abbildung

$$\varphi = (f)_{f \in F} : X \rightarrow \mathbb{C}^F, x \rightsquigarrow (f(x))_{f \in F},$$

stetig, und es gilt:

(3.1) Hilfssatz.

Für jedes $x_0 \in X \setminus \varphi^{-1}(0)$ ist $\{f \in F : f(x_0) \neq 0\}$ offen und dicht in F . —

Beweis: Die lineare Abbildung $\lambda : F \rightarrow \mathbb{C}, f \rightsquigarrow f(x_0)$, ist stetig und surjektiv; deshalb auch offen, nach dem Satz

von BANACH, weil F und $\mathbb{C}$ vollständige metrisierbare Vektorräume sind. Die Menge $\{0\}$ ist nirgends dicht und abgeschlossen in $\mathbb{C}$. Also liegt wegen Hilfssatz (1.1)

$$\bar{\alpha}^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = F \setminus \bar{\alpha}^{-1}(0) = \{f \in F : f(x_0) \neq 0\}$$

offen und dicht in F ; q.e.d. ---

Nun folgt unmittelbar die Verallgemeinerung einer Aussage von GRAUERT [14, Hilfssatz 1] :

(3.2) Lemma.

Ist X' eine abzählbare Teilmenge von $X \setminus \bar{\varphi}^{-1}(0)$, so liegt $\{f \in F : 0 \notin f(X')\}$ fett in F . ---

Der Beweis ist trivial, weil

$$\{f \in F : 0 \notin f(X')\} = \bigcap_{x \in X'} \{f \in F : f(x) \neq 0\}$$

ist.

Auf dieses Lemma stützt sich der Beweis des ersten Satzes dieses Paragraphen, der im Spezialfall wiederum von GRAUERT [14, Satz 2] stammt :

(3.3) Darstellungssatz.

Es sei $(X, \mathcal{R})$ ein n -dimensionaler komplexer Raum mit abzählbarer Topologie, F ein vollständiger Untervektorraum von $A = H^0(X, \mathcal{R})$ und $\varphi := (f)_{f \in F} : X \rightarrow \mathbb{C}^F$, $x \rightsquigarrow (f(x))_{f \in F}$.

Dann ist die Gesamtheit aller $(n+1)$ -tupel $g \in F^{n+1}$ mit $\bar{g}^{-1}(0) = \bar{\varphi}^{-1}(0)$ fett in F^{n+1} . ---

Mit anderen Worten : Die analytische Menge $\bar{\varphi}^{-1}(0)$, das ist das gemeinsame Nullstellengebilde der Funktionen aus F , kann schon durch $n+1$ Elemente aus F dargestellt werden.

Die Auswahl dieser Funktionen ist auf "vielfältige" Weise

möglich. Eine Verschärfung dieser Aussage, die an den Idealbasis-Satz von HILBERT-RÜCKERT-CARTAN [5, p. 191] erinnert, haben O.FORSTER und K.J.RAMSPOTT [11, Satz 1] bewiesen.

Zum Beweis des Darstellungssatzes können wir o.E.d.A. annehmen, daß F von $\{0\}$ verschieden ist. Dann ist $\bar{\varphi}^1(0)$ eine von X verschiedene, abgeschlossene Menge, $'X := X \setminus \bar{\varphi}^1(0)$ ist offen und nichtleer mit $\dim 'X \leq \dim X = n$. $'X^* \subset 'X$ sei eine abzählbare Punktmenge, die jede irreduzible Komponente von $'X$ trifft. Nach Lemma (3.2) ist die Gesamtheit F_0 aller Funktionen aus F , die auf $'X^*$ nicht verschwinden, fett in F . Es sei $f_0 \in F_0$ beliebig gewählt. Dann gilt:

$$\bar{\varphi}^1(0) \subset \bar{f}_0^{-1}(0), \quad M_0 := 'X \cap \bar{f}_0^{-1}(0) \subset 'X \setminus 'X^*,$$

$$\dim M_0 < \dim 'X \leq n.$$

M_0^* sei eine abzählbare Teilmenge von M_0 , die aus jeder irreduziblen Komponente von M_0 einen Punkt enthält. Die Menge F_1 aller $f \in F$ mit $0 \notin f(M_0^*)$ ist fett in F , hängt aber von der Wahl der Funktion $f_0 \in F_0$ ab. Für $f_1 \in F_1$ und $g_1 := (f_0, f_1) \in F^2$ gilt:

$$\bar{\varphi}^1(0) \subset \bar{g}_1^{-1}(0) \subset \bar{f}_0^{-1}(0), \quad M_1 := 'X \cap \bar{g}_1^{-1}(0) \subset M_0 \setminus M_0^*,$$

$$\dim M_1 < \dim M_0, \text{ d.h. } \dim M_1 < n-1.$$

Durch genau n analoge Beweisschritte erhalten wir eine absteigende Folge analytischer Mengen

$$\bar{g}_0^{-1}(0) \supset \bar{g}_1^{-1}(0) \supset \bar{g}_2^{-1}(0) \supset \dots \supset \bar{g}_n^{-1}(0) \supset \bar{\varphi}^1(0)$$

mit $g_v := (f_0, \dots, f_v) \in F^{v+1}$ ($v=0, \dots, n$), wobei f_v aus einer fetten Menge $F_v \subset F$ gewählt werden kann, die aller-

dings von der Wahl des $f_{v-1} \in F_{v-1}$ abhängig ist. Außerdem gilt :

$$\dim('X \cap \bar{g}_v^1(0)) < n-v, \quad \dim('X \cap \bar{g}_n^1(0)) < 0.$$

Darum ist $\bar{g}_n^1(0) \cap 'X = \emptyset$, und $\bar{g}_n^1(0) \subset \bar{\varphi}^1(0)$. Wir haben also eine Darstellung $\bar{\varphi}^1(0) = \bar{g}_n^1(0)$ mit $g_n \in F^{n+1}$ gefunden. Nach Hilfssatz (1.1) folgt auch sofort, daß g_n aus einer dichten Menge gewählt werden kann, weil alle F_v ($v=0, \dots, n$) fett, insbesondere dicht in F liegen.

Als lokal-kompakter Raum mit abzählbarer Topologie kann $'X = X \setminus \bar{\varphi}^1(0)$ durch kompakte Mengen $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \subset 'X$ ausgeschöpft werden. G_1 bezeichne die Gesamtheit aller Abbildungen aus F^{n+1} , die keinen Punkt aus K_1 in den Nullpunkt des $\mathbb{C}^{n+1}$ werfen :

$$G_1 := \{g \in F^{n+1} : 0 \notin g(K_1)\}, \quad i=0,1,2,\dots.$$

Für $g \in F^{n+1}$ mit $\bar{g}^1(0) = \bar{\varphi}^1(0)$ ist $0 \notin g('X)$ und (wegen der Stetigkeit von φg , $\varphi : H^0(X, \mathcal{L}) \rightarrow H^0(X, \mathcal{L}_T)$)

$$\varepsilon_1 := \inf |g(K_1)| > 0$$

für alle natürlichen Zahlen i . Darum sind alle $h \in F^{n+1}$ mit $\|h - g\|_{K_1} < 1/2 \cdot \varepsilon$ in G_1 enthalten. G_1 ist Obermenge einer offenen und dichten Teilmenge von F^{n+1} , und

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} G_i = \{g \in F^{n+1} : 0 \notin g('X)\} = \{g \in F^{n+1} : \bar{g}^1(0) = \bar{\varphi}^1(0)\}$$

liegt fett in F^{n+1} ; q.e.d. ---

(3.4) Trennungssatz.

Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein n -dimensionaler komplexer Raum mit abzählbarer Topologie, F ein vollständiger Untervektorraum von $A := H^0(X, \mathcal{A})$. Dann ist die Menge aller Abbildungen aus F^{2n+1} , die die gleichen Punkte wie F trennen, fett in F^{2n+1} . ---

Beweis : Für $\varphi := (f)_{f \in F} : X \rightarrow \mathbb{C}^F$ ist

$$T := \bigcap_{x \in X} \{g \in F^{2n+1} : \bar{g}^1(g(x)) = \bar{\varphi}^1(\varphi(x))\}$$

die betrachtete Menge von Abbildungen; denn $g \in F^{2n+1}$ gehört genau dann zu T , wenn $g(x) \neq g(y)$ ist für alle x und y aus X mit $\varphi(x) \neq \varphi(y)$; $\varphi(x)$ und $\varphi(y)$ sind aber genau dann verschieden, wenn es ein $f \in F$ mit $f(x) \neq f(y)$ gibt...

Wir betrachten den Produktraum $(X \times X, \mathcal{B}) = (X, \mathcal{A}) \times (X, \mathcal{A})$, die Algebren $A := H^0(X, \mathcal{A})$ und $B := H^0(X \times X, \mathcal{B})$ sowie die stetigen Algebra-Homomorphismen $\pi_1 : A \rightarrow B$, wobei A und B FRÉCHET-MONTELSche Räume sind und deshalb abzählbare Topologie besitzen.

Auch $\pi : A \rightarrow B$, $f \rightsquigarrow \pi_1 f - \pi_2 f$, ist stetig und linear. $G := \pi(F) = \pi(F')$ für $F' := F + \mathbb{C}$, das nach BOURBAKI [3, Chap. I, § 2, n° 3, cor. 4] wie F ein vollständiger Untervektorraum von A ist.

Es sei $(pr_1, pr_1^*) : (X \times X, \mathcal{B}) \rightarrow (X, \mathcal{A})$ die Projektion auf die erste Koordinate. Dann ist $(X, \mathcal{A})$ nach Satz (2.3) biholomorph äquivalent zu $(X \times \{x_0\}, \mathcal{F})$ für $x_0 \in X$ (beliebig) und die pr_1 -Struktur $\mathcal{F}$ auf der Faser $pr_1^{-1}(pr_1(x, x_0))$. Da $(X \times \{x_0\}, \mathcal{F})$ ein komplexer Unterraum von $(X \times X, \mathcal{B})$ ist, gibt es eine lineare, stetige Abbildung $j : B \rightarrow A$, die

durch die Einbettung induziert wird. j wiederum erzeugt eine stetige Abbildung

$$j_0 : G \rightarrow F'/\mathbb{C}, \quad g = \pi(f+\alpha) \rightsquigarrow f + \mathbb{C}, \quad \text{für } f+\alpha \in F',$$

$F'/\mathbb{C}$ ist wie F' ein FRÉCHET-Raum, BOURBAKI [3, Chap. II, § 2, n° 1]. Ist $g_v = \pi(f_v) \in G$, $f_v \in F'$, eine CAUCHY-Folge, $g_v \rightarrow g \in B$, so konvergiert $j_0(g_v) = f_v + \mathbb{C} \in F'/\mathbb{C}$ gegen eine Restklasse $f + \mathbb{C}$ mit $f \in F'$. Es gilt aber einerseits $g_v = \tilde{\pi} j_0(g_v) \rightarrow \pi(f)$, weil auch $\tilde{\pi} : F'/\mathbb{C} \rightarrow G$ stetig ist, und andererseits $g_v \rightarrow g$. Wir haben also $g = \pi(f) \in \pi(F') = G$, und G ist ein abgeschlossener, somit vollständiger Untervektorraum von B .

Ist $\gamma : X \times X \rightarrow \mathbb{C}^G$, $(x,y) \rightsquigarrow (g(x,y))_{g \in G}$, so werden zwei Punkte x und y aus X genau dann von den Funktionen aus F getrennt, wenn (x,y) nicht im gleichzeitigen Nullstellengebilde $\gamma^{-1}(0)$ aller Funktionen aus G enthalten ist.

Auf den komplexen Raum $(X \times X, \mathcal{B})$ und den vollständigen Untervektorraum G von B wenden wir den Darstellungssatz an. Es ist $\dim(X \times X) = 2n$. Wir wissen deshalb, daß die Gesamtheit T_1 aller $(2n+1)$ -Tupel von Elementen aus G , die $\gamma^{-1}(0)$ darstellen, fett in G^{2n+1} liegt. Das $(2n+1)$ -fache cartesische Produkt $\hat{\pi} : F^{2n+1} \rightarrow G^{2n+1}$ von π ist eine offene, stetige, surjektive und lineare Abbildung. Das Urbild von T_1 bei $\hat{\pi}$ ist mithin nach Hilfssatz (1.1) eine fette Teilmenge von F^{2n+1} . $\hat{\pi}^{-1}(T_1)$ stimmt aber mit T überein.

Damit ist der Trennungssatz bewiesen. ---

§ 4. Injektive und diskrete Abbildungen.

Wir wollen die Ergebnisse aus dem vorigen Paragraphen anwenden : Ist $(X, \mathcal{A})$ ein holomorph-separabler komplexer Raum, so trennt $A := H^0(X, \mathcal{A})$ alle Punkte von X , d.h. zu je zwei (verschiedenen) Punkten $x, y \in X$ gibt es ein $f \in A$ mit $f(x) \neq f(y)$; oder : die Abbildung $\alpha : X \rightarrow \mathbb{C}^A$, $x \mapsto (f(x))_{f \in A}$, ist injektiv. Für den Fall $F = A$ erhalten wir daher aus dem Trennungssatz :

(4.1) Satz.

Ist $(X, \mathcal{A})$ ein n -dimensionaler, holomorph-separabler komplexer Raum und $A := H^0(X, \mathcal{A})$, so ist die Menge aller injektiven, holomorphen Abbildungen von $(X, \mathcal{A})$ in $(\mathbb{C}^{2n+1}, 0)$ fett in A^{2n+1} . ---

Wir haben dabei berücksichtigt, daß jeder holomorph-separable komplexe Raum holomorph-ausbreitbar ist und deshalb abzählbare Topologie besitzt, siehe GRAUERT [13]. Im holomorph-ausbreitbaren Fall ist die Abbildung $\alpha : X \rightarrow \mathbb{C}^A$ diskret. Daher gilt :

(4.2) Satz.

Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein n -dimensionaler, holomorph-ausbreitbarer komplexer Raum mit $A := H^0(X, \mathcal{A})$. Dann ist die Gesamtheit D' aller diskreten, holomorphen Abbildungen von $(X, \mathcal{A})$ in $(\mathbb{C}^{2n+1}, 0)$ fett in A^{2n+1} . ---

Diese Aussage ist jedoch nicht scharf, weil es diskrete, holomorphe Abbildungen von X in den $\mathbb{C}^n$ gibt - vgl. mit GRAUERT [13] - . Wir wollen sogar zeigen :

(4.3) Satz.

Für jeden n -dimensionalen, holomorph-ausbreitbaren komplexen Raum $(X, \mathcal{A})$ ist die Menge D aller diskreten, holomor-

phen Abbildungen $(X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{P}^n, \mathcal{O})$ fett in A^n für
 $A := H^0(X, \mathcal{A})$. ---

Zum Beweis benötigen wir noch einige Vorbereitungen :

Ist $(\tau, \tau^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ eine holomorphe Abbildung,
 so sind alle Fasern $\tau^{-1}(\tau(x))$ analytische Mengen in X .
 Die Entartungsmenge $E(\tau)$ bezeichnet die Gesamtheit aller
 Punkte x aus X mit $c_x(\tau) < c(\tau)$, wenn

$$c_x(\tau) := \text{codim}_X(\tau^{-1}(\tau(x))) = \dim_X X - \dim_X(\tau^{-1}(\tau(x))) ,$$

$$c(\tau) := \sup_{y \in X} \text{codim}_Y(\tau^{-1}(\tau(y))) .$$

$c(\tau)$ bzw. $c_x(\tau)$ werden oft Rang von τ (im Punkte x)
 genannt. Diese Namen wollen wir aber einem anderen Begriff
 vorbehalten (vgl. mit §6) .

Ist X irreduzibel, so bildet $E(\tau)$ eine niederdimensionale
 analytische Menge, nach REMMERT [28, Satz 18]. τ heißt nicht
 entartet in $x \in X$, wenn $x \notin E(\tau)$. τ wird nirgends ent-
 artet genannt, wenn $E(\tau)$ leer ist. Jede diskrete, holo-
 morphie Abbildung ist nirgends entartet. (Einige Autoren
 nennen nur diskrete, holomorphe Abbildungen nirgends ent-
 artet. Die hier angegebene Definition ist natürlich die all-
 gemeinere) .

Nach R.REMMERT und K.STEIN [29, Hilfssatz] sowie [28, Satz
 19] erhalten wir sofort :

(4.4) Hilfssatz.

Es sei $c(\tau) =: c < \infty$. Dann ist das Bild $\tau(X)$ abzähl-
 bare Vereinigung von irreduziblen, höchstens c -dimensiona-
 len lokal-analytischen Mengen in Y . ---

Nun können wir den Beweis von Satz (4.3) beginnen. Nach
 Satz (4.2) gibt es eine holomorphe und diskrete Abbildung

$(f, f^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n+1}, \mathcal{A}_{2n+1}^0)$, d.h. insbesondere, daß $c_x(f) \leq n = \dim X$ für alle $x \in X$. Wegen Hilfssatz (4.4) zerfällt $f(X)$ in abzählbar viele irreduzible, höchstens n -dimensionale lokal-analytische Mengen M_i in $\mathbb{C}^{2n+1}$. Deshalb kann die folgende Aussage angewendet werden:

(4.5) Hilfssatz.

M sei eine irreduzible, n -dimensionale lokal-analytische Menge im $\mathbb{C}^m$ mit $m > n$. Dann ist die Menge Q derjenigen Projektionsrichtungen fett, längs derer die Abbildungen von M in den $\mathbb{C}^{m-1}$ diskret sind. ---

Diese Feststellung stammt wohl ursprünglich von KOOPMAN und BROWN [21, Theorem 5.I], die 1932 nur den reellen Fall betrachteten und bewiesen. GRAUERT [13, Satz 9] benutzt die Behauptung, um nachzuweisen, daß der holomorph-ausbreitbare komplexe Raum abzählbare Topologie besitzt, und beweist sie deshalb auch für den komplexen Fall. --

Wir wissen also, daß es eine Abbildung $p : f(X) = \bigcup M_i \rightarrow \mathbb{C}^{2n}$ gibt, die auf jedem M_i diskret ist. Man sieht leicht, daß p eine holomorphe und diskrete Abbildung ist. Deshalb induziert $f_1 := p \circ f$ eine diskrete und holomorphe Abbildung $(f_1, f_1^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{C}^{2n}, \mathcal{A}_{2n}^0)$, auf die wir erneut das gerade beschriebene Verfahren anwenden können.

In $n+1$ Schritten erhalten wir auf diese Weise eine diskrete und holomorphe Abbildung von $(X, \mathcal{A})$ in den $(\mathbb{C}^n, \mathcal{A}_n^0)$. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß die Gesamtheit D solcher Abbildungen fett in A^n liegt.

Wir beweisen zunächst, daß $D \subset A^n$ dicht ist. Dazu fassen wir die folgende Aussage ins Auge:

(+) Die Menge D_m der diskreten Abbildungen aus A^m sei dicht ($m > 1$). Für jedes $f \in D_m$ sei die

Gesamtheit Q_f der Projektionen $p \in P := M(m \times (m-1), \mathbb{C})$ mit diskretem $p|f(X)$ dicht. Dann ist D_{m-1} dicht in A^{m-1} . —

Nach Hilfssatz (1.1) – Zusatz – ist $D_m \times Q$ für $Q := \bigcup_{f \in D_m} Q_f$ dicht in $A^m \times P$. Die Abbildung

$$\varphi : A^m \times P \rightarrow A^{m-1}, \quad (f, p) \rightsquigarrow p \circ f,$$

ist stetig, linear und surjektiv, deshalb nach dem Satz von BANACH offen. Weil $D_{m-1} \supset \varphi(D_m \times Q)$ ist, gilt wiederum nach Hilfssatz (1.1) : D_{m-1} ist dicht in A^{m-1} .

Wegen unserer Sätze (4.2), (4.3) und (4.4) sind für $m = 2n+1$ die Voraussetzungen von (+) erfüllt. $D' = D_{2n+1}$, $D = D_n$ ist dicht in A^n .

Warum ist D nun fett in A^n ? X ist ein lokal-kompakter Raum mit abzählbarer Topologie. Deshalb gibt es eine Ausschöpfung $X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X$ durch relativ-kompakte, offene Teilmengen mit $\overline{X_1} \subset X_{1+1}$. $D_{(i)}$ sei die Gesamtheit aller auf X_1 diskreten Abbildungen aus A^n . Nach GRAUERT [13, Hilfssatz 3] gilt:

(4.6) Hilfssatz.

Die holomorphe Abbildung $f \in A^r$ ($r \in \mathbb{N}$) sei diskret in einer offenen Menge $X' \subset X$. Dann gibt es zu jedem kompakten Teil $K \subset X'$ eine Umgebung $U_{K,f} \subset A^r$, so daß alle $g \in U_{K,f}$ in einer Umgebung von K diskret sind. —

Es ist daher klar, daß zu jedem Index i und jeder diskreten Abbildung $f \in A^n$ eine offene, in $D_{(i)}$ enthaltene Umgebung $U_{if} \subset A^n$ existiert. $D_{(i)}$ ist Obermenge einer offenen und dichten Menge, $D = \bigcap_{i=0}^{\infty} D_{(i)}$ ist fett in A^n ; q.e.d. —

§ 5. (Fast-)eigentliche Abbildungen.

(5.1) Satz.

$(X, \mathcal{A})$ sei ein n -dimensionaler, schwach-holomorph-konvexer komplexer Raum mit abzählbarer Topologie und $A := H^0(X, \mathcal{A})$. Dann ist die Menge F aller fasteigentlichen, holomorphen Abbildungen von $(X, \mathcal{A})$ in $(\mathbb{C}^n, \mathcal{O})$ fett in A^n . ---

Beim Beweis wollen wir uns kurz fassen: Wie BISHOP [1] (für den reduzierten Fall) können wir zeigen, daß $F \subset A^n$ dicht ist. Denn zu $(X, \mathcal{A})$ gibt es eine Ausschöpfung $X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X$ durch analytische Polyeder $(X_{i-1} \subset \overset{\circ}{X}_i)$ von der speziellen Gestalt

$$X_i = \bigcap_{v=1}^n \{x \in U_i : |f_{vi}(x)| \leq 1\}$$

mit $f_{vi} \in A$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $v=1, \dots, n$. Ist $h \in A^n$ beliebig gewählt, so ist

$$f := h + \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (f_{1i}^{t_i}, \dots, f_{ni}^{t_i})$$

bei geeigneter Wahl der Koeffizienten $\alpha_i \in \mathbb{C}$ und der Potenzen $t_i \in \mathbb{N}$ eine fasteigentliche Abbildung aus A^n , weil A^n eine vollständige topologische Algebra (über $\mathbb{C}$) ist. Die Abbildung $\phi : \mathbb{C} \rightarrow A^n$, $\alpha \rightsquigarrow h + \alpha g$, (für $h, g \in A^n$) ist stetig mit $\phi(0) = h$. Deshalb können wir die $\alpha_i \in \mathbb{C}$ so klein wählen, daß f nahe genug bei h liegt.

Es bleibt also nachzuprüfen, daß $F \subset A^n$ fett ist. X darf o.E.d.A. als zusammenhängend gewählt werden, so daß alle X_i zusammenhängend sein können. $\mathbb{C}^n$ schöpfen wir in gleicher Weise durch

$$P_k := \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n : \sup_{1 \leq v \leq n} |z_v| < k\}$$

und $Q_k := \overline{P_k}$ aus. Nun bezeichne F_{ik} die Gesamtheit derjenigen holomorphen Abbildungen $f \in A^n$, für die alle Zusammenhangskomponenten von $f(Q_k)$, die X_i treffen, kompakt sind. Weil $F = \bigcap_{i,k=0}^{\infty} F_{ik}$ gilt, genügt es zu zeigen, daß alle F_{ik} fett in der Menge A^n liegen.

(5.2) Hilfssatz.

Zu jeder fasteigentlichen Abbildung $f \in A^n$ gibt es Umgebungen $U_{ik}(f) \subset A^n$ mit $U_{ik}(f) \subset F_{ik}$. ---

F_{ik} enthält dann die Vereinigung aller $U_{ik}(f)$ für $f \in F$ und ist als Obermenge einer offenen und dichten Menge fett in A^n .

Der Beweis des Hilfssatzes geht von einer fasteigentlichen Abbildung $f: X \rightarrow \mathbb{C}^n$, $f \in A^n$, aus. Mit W_{ik} bezeichnen wir die Vereinigung der Zusammenhangskomponenten von $f(P_k)$, die X_{i-1} treffen. Dann gilt:

$M_{ik} := f(Q_k) \cap W_{i,k+1}$ stimmt mit der Vereinigung der Zusammenhangskomponenten von $f(Q_k)$ überein, die in $W_{i,k+1}$ liegen; weil $Q_k \subset P_{k+1}$.

$N_{ik} := f(Q_k) \setminus M_{ik}$ ist ebenfalls abgeschlossen in X .

$T_{ik} := M_{ik} \cup X_i$ ist kompakt, weil $W_{i,k+1}$ relativ-kompakt ist.

Es gibt eine kompakte Menge $L_{ik} \subset X$, die N_{ik} nicht trifft und T_{ik} im Innern enthält, weil X ein normaler topologischer Raum ist.

Die Vereinigung V_{ik} aller X_i schneidenden Zusammenhangskomponenten von $f(Q_k)$ ist in M_{ik} enthalten; deshalb ist $(V_{ik} \cup X_i) \subset T_{ik} \subset L_{ik}$. E_{ik} ist kompakt mit $\partial L_{ik} \cap f(Q_k) = \emptyset$. Auch $f(\partial L_{ik})$ ist kompakt und $f(\partial L_{ik}) \cap Q_k = \emptyset$. Deshalb haben wir:

$$0 < \varepsilon_{ik}(f) := \inf \left\{ \sup_{1 \leq v \leq n} |z_v - w_v| \mid \begin{array}{l} (z_1, \dots, z_n) \in f(\partial L_{ik}) \\ (w_1, \dots, w_n) \in Q_k \end{array} \right\},$$

und

$$U_{ik}(f) := \left\{ g \in A^n : \|f - g\|_{L_{ik}} < \varepsilon_{ik}(f) \right\}$$

ist eine offene nichtleere Teilmenge von A^n . Für alle holomorphen Abbildungen $g \in U_{ik}(f)$ ist

$$\|f - g\|_{L_{ik}} =: \varepsilon(g) < \varepsilon_{ik}(f).$$

Wir sehen, daß für $x \in L_{ik}$ und $w \in Q_k$ gilt:

$$|g(x) - w| \geq |f(x) - w| - |f(x) - g(x)| \geq \varepsilon_{ik}(f) - \varepsilon(g) > 0,$$

$$g(\partial L_{ik}) \cap Q_k = \emptyset \quad \text{und} \quad \partial L_{ik} \cap \bar{g}^{-1}(Q_k) = \emptyset.$$

Jede Zusammenhangskomponente M von $\bar{g}^{-1}(Q_k)$, die X_1 trifft, ist abgeschlossen in X und in L_{ik} enthalten. Darum gehört g zu F_{ik} . Der Hilfssatz und Satz (5.1) sind bewiesen. ---

(5.3) Satz.

Ist $(X, \mathcal{A})$ ein n -dimensionaler, holomorph-konvexer komplexer Raum mit abzählbarer Topologie und $A := H^0(X, \mathcal{A})$, so ist die Gesamtheit E aller eigentlichen, holomorphen Abbildungen von $(X, \mathcal{A})$ in $(\mathbb{C}^{n+1}, \pi_{n+1}^0)$ dicht in A^{n+1} . ---

Nach NARASIMHAN [24] kann die Schranke $n+1$ nicht ohne zusätzliche Voraussetzungen verkleinert werden. Denn ist X ein holomorph-ausbreitbarer, irreduzibler komplexer Raum der Dimension n und $f: X \rightarrow \mathbb{C}^n$ eine eigentliche, holomorphe Abbildung, so bestehen wegen des Maximumprinzips alle Fasern $f^{-1}(f(x))$ nur aus endlich vielen Punkten. Also ist: $c_X(f) := \dim_X X - \dim_X f^{-1}(f(x)) = \dim_X X = c(f) = n$. $f(X)$ ist eine n -dimensionale analytische Menge in $\mathbb{C}^n$,

d.h. $f(X) = \mathbb{C}^n$, und $f: X \rightarrow \mathbb{C}^n$ ist eine analytisch-verzweigte Überlagerung, vgl. dazu mit GRAUERT und REMMERT [13], [19]. b sei die Blätterzahl von $(X, f, \mathbb{C}^n)$. Jede auf X holomorphe Funktion h erfüllt für alle $z \in \mathbb{C}^n$ die Gleichung

$$\sum_{\beta=0}^b \sigma_{\beta}(z) h^{\beta} = 0,$$

wenn σ_{β} die elementarsymmetrischen Funktionen der Zahlen $h(x_{\beta}) \in \mathbb{C}$ ($\beta=1, \dots, b$) für $f(z) = \{x_1, \dots, x_b\}$ sind, siehe dazu [19, § 3.1] und [29, 2.3]. Ist h beschränkt, so sind alle σ_{β} auf $\mathbb{C}^n$ beschränkt und deshalb nach dem Satz von LIOUVILLE konstant. h muß also selbst konstant sein.

Es gibt jedoch holomorph-ausbreitbare, ja sogar STEINsche Räume mit nichtkonstanten beschränkten global holomorphen Funktionen.

Der Beweis von Satz (5.3) stammt von BISHOP [1, Theorem 8]. Wir wollen nur eine Skizze angeben: Zu jeder fasteigentlichen, holomorphen Abbildung $f \in A^n$ existiert eine dichte Menge $E_f \subset A$, so daß die Verbindung (f, h) mit $h \in E_f$ jeweils eine eigentliche Abbildung von X in den $\mathbb{C}^{n+1}$ induziert. Die Behauptung folgt dann aus dem Zusatz von Hilfssatz (1.1), weil die Projektion $A^{n+1} \rightarrow A^n$ auf die ersten Koordinaten eine stetige, offene sowie surjektive Abbildung und die Gesamtheit F aller fasteigentlichen, holomorphen Abbildungen von $(X, \mathcal{A})$ in $(\mathbb{C}^n; \mathcal{O}_n)$ fett (also insbesondere dicht) in A^n ist.

Die Menge $E_f \subset A$ wird folgendermaßen konstruiert:

$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X$ und $Q_0 \subset Q_1 \subset \dots \subset \mathbb{C}^n$ seien Ausschöpfungen, wie sie im Beweis von Satz (5.1) bereits angegeben wurden.

Bei beliebig gewählten natürlichen Zahlen i_0 und k_0 bezeichne $M_i^{(i_0, k_0)}$ die Vereinigung derjenigen Zusammenhangs-

komponenten von $f^{(-1)}(Q_{i+k_0})$, die X_{i+i_0} treffen. Außerdem sei :

$$N_0^{(i_0, k_0)} := M_1^{(i_0, k_0)} \text{ und}$$

$$N_i^{(i_0, k_0)} := (f^{(-1)}(Q_{i+k_0}) \cap M_{i+1}^{(i_0, k_0)}) \setminus M_i^{(i_0, k_0)} \quad (i \geq 1).$$

$N_0, N_1, N_2, \dots$ ist eine Folge paarweise disjunkter, relativ-kompakter und X -konvexer Teilmengen, die gegen ∞ konvergieren, d.h. keine Punktfolge $x_1, x_2, \dots$ mit x_v jeweils aus N_v besitzt in X einen Häufungspunkt.

Aus diesen Bedingungen und der Holomorphie-Konvexität von $(X, \mathcal{A})$ folgt, daß zu beliebig vorgegebenen holomorphen Funktionen $g_v \in A$ und positiven Zahlen ε_v stets ein $g \in A$ der Gestalt $g = \sum_{v=0}^{\infty} h_v g_v$ für geeignete $h_v \in A$ mit der Eigenschaft $\|g - g_v\|_{N_v} < \varepsilon_v \quad (v \in \mathbb{N})$ existiert.

Gilt speziell

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \inf |g_v(N_v)| = \infty,$$

so gehört ein solches g zu E_f .

$U \subset A$ sei eine Umgebung einer holomorphen Funktion $h \in A$.

Wir setzen $g_0 := h$ und $g_v \equiv 0$ für $v \geq 1$. Weil

$$A \times A \rightarrow A, (h, g) \rightsquigarrow h g \text{ und}$$

$$A \times A \rightarrow A, (h, g) \rightsquigarrow h + g$$

stetige Abbildungen sind, können wir die $h_v \in A$ und i_0, k_0 so wählen, daß $g = \sum h_v g_v$ in U liegt ; ---

Die für spätere Anwendungen im §8 wichtigste Aussage in diesem Zusammenhang ist die folgende :

(5.4) Satz (NARASIMHAN [24]).

$(X, \mathcal{A})$ sei ein holomorph-vollständiger komplexer Raum der Dimension n mit $A := H^0(X, \mathcal{A})$, $\beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine beliebige Abbildung, $K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset X$ eine Ausschöpfung durch kompakte Mengen mit $K_{v-1} \subset K_v$ ($v=1,2,3,\dots$).

Dann gibt es eine holomorphe Abbildung $g \in A^{2n+1}$ mit

$$\inf |g(X \setminus K_v)| \geq \beta(v)$$

für alle $v \in \mathbb{N}$. Insbesondere ist $g \in A^{2n+1}$ eigentlich, wenn $\lim \beta(\mathbb{N}) = \infty$ ist. ---

Weil $(X, \mathcal{A})$ holomorph-vollständig ist, und die Bedingung $\inf |g(X \setminus K_v)| \geq \beta(v)$ nur die Funktionswerte von g betrifft, genügt es den angegebenen Satz für reduzierte Räume zu beweisen. Die konstruierte Abbildung können wir wegen Satz (2.1) mittels der Reduktionsabbildung liften.

Aus [24, Theorem 1 und 2] können wir Folgendes entnehmen : Ein "zulässiges System" $\{U_i\}_{i \in I}$ ist eine lokal-endliche Familie offener, relativ-kompakter und paarweise disjunkter Mengen $U_i \subset X$, deren Vereinigung U holomorph-konvex bezüglich X ($= X$ -konvex) ist, d.h. für jede kompakte Menge $K \subset U$ ist auch

$$\hat{K} \cap U = \bigcap_{f \in A} \{x \in U : |f(x)| \leq \sup |f(K)|\}$$

kompakt in U . Außerdem gibt es eine Ausschöpfung $B_0 \subset B_1 \subset \dots \subset X$ durch offene, relativ-kompakte Mengen, so daß $\overline{B_j}$ in B_{j+1} enthalten ist, und alle $B_j \cup U$ ($j \in \mathbb{N}$) wieder X -konvex sind. Die Folge B_j kann o.B.d.A. mit der zusätzlichen Eigenschaft $U_i \subset B_j$, falls $U_i \cap B_j \neq \emptyset$ ist, gewählt werden.

Mit Hilfe des RUNGESchen Approximationssatzes von WEIL-OKA (siehe K.OKA [25; I und II], H.CARTAN [5], [6] und K.STEIN [32])

läßt sich für reduzierte komplexe Räume leicht zeigen,

[24, Theorem 2] :

(*) Ist $\{U_i\}_{i \in I}$ ein zulässiges System auf einem STEIN-schen Raum $(X, \mathcal{A})$, $K_i \subset U_i$ kompakt, $f_i \in H^0(U_i, \mathcal{A})$ und $\varepsilon_i > 0$ für $i \in \mathbb{N}$, so gibt es eine holomorphe Funktion $g \in \mathcal{A}$ mit

$$\sup_{x \in K_i} |g(x) - f_i(x)| < \varepsilon_i \text{ für alle } i. \text{ ---}$$

Die Verallgemeinerung auf beliebige komplexe Räume im Sinne von GRAUERT ist aus den oben angegebenen Gründen trivial.

Es gilt außerdem [24, Theorem 1] :

Jeder n-dimensionale holomorph-vollständige komplexe Raum X besitzt $2n+1$ zulässige Systeme $\{U_i^{\mu}\}_{i \in I}$ ($\mu=1, \dots, 2n+1$) mit

$$X = \bigcup_{\mu=1}^{2n+1} \bigcup_{i \in I} U_i^{\mu}. \text{ ---}$$

Nun, zum Beweis von (5.4) dürfen wir o.B.d.A. annehmen, daß die Abbildung $\beta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend ist; andernfalls gehen wir über zur Folge $\beta'(v) := \sup \{\beta(0), \dots, \beta(v)\}$, und jede Abbildung $g \in \mathcal{A}^{2n+1}$ mit

$$\inf |g(X \setminus K_v)| \geq \beta'(v) \geq \beta(v)$$

hat die gewünschte Eigenschaft.

Da $(X, \mathcal{A})$ holomorph-vollständig und n-dimensional ist, existieren zulässige Systeme $\{U_i^{\mu}\}_{i \in I}$ ($\mu=1, \dots, 2n+1$) mit

$$X = \bigcup_{\mu=1}^{2n+1} \bigcup_{i \in I} U_i^{\mu},$$

alle U_i^{μ} sind relativ-kompakt und offen. Deshalb gibt es

nach dem Schrumpfungssatz sogar kompakte Mengen $K_i \subset U_i$
mit

$$X = \bigcup_{\mu=1}^{2n+1} \bigcup_{i \in I} K_i.$$

Betrachten wir die Ausschöpfung $K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset X$, wie sie in (5.4) vorausgesetzt wird. $v_{i\mu} \in \mathbb{N}$ sei die kleinste Zahl v mit $U_i \subset K_v$. Für alle $i \in I$ und alle $\mu=1, \dots, 2n+1$ definieren wir die konstanten Funktionen

$$f_{i\mu} := 1 + B(v_{i\mu}) \in H^0(U_i, \mathcal{A}).$$

Nach Aussage (*) gibt es für jedes $\mu=1, \dots, 2n+1$ eine holomorphe Funktion $g_\mu \in \mathcal{A}$ mit

$$\sup_{x \in K_i} |g_\mu(x) - f_{i\mu}(x)| < 1 \quad \text{für alle } i \in I.$$

Wir zeigen endlich, daß $g := (g_1, \dots, g_{2n+1}) \in A^{2n+1}$ die "richtige" Eigenschaft hat: Jeder Punkt $x \in X \setminus K_v$ ist in einer kompakten Menge $K_i \subset U_i$ enthalten, so daß $U_i \not\subset K_v$ und $v_{i\mu} \geq v$ gilt. Wir wissen deshalb:

$$|g_\mu(x) - (1 + B(v_{i\mu}))| < 1 \quad \text{und} \quad |g_\mu(x)| > B(v_{i\mu}) \geq B(v).$$

Da $|g(x)| = \sup \{ |g_1(x)|, \dots, |g_{2n+1}(x)| \} \geq |g_\mu(x)| > B(v)$ ist, haben wir

$$\inf |g(X \setminus K_v)| \geq B(v)$$

bewiesen. ---

III. Algebraische Gesichtspunkte.

In diesem Kapitel sollen für holomorphe Abbildungen

$(\tau, \tau^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ die Eigenschaften der Familie

$\tau^* : X \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ von Algebra-Homomorphismen

$\tau_x^* : \mathcal{B}_{\tau(x)} \rightarrow \mathcal{A}_x$ sowie die abgeleiteten Abbildungen

$\tilde{\tau}_x : \mathcal{B}_{\tau(x)} / \mathcal{B}_{\tau(x)}^2 \rightarrow \mathcal{A}_x / \mathcal{A}_x^2$,
 siehe Hilfssatz (1.2), untersucht werden.

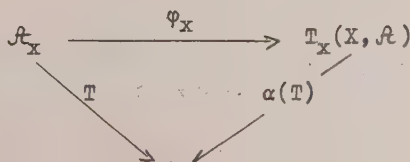
§ 6. Tangentialräume.

$(X, \mathcal{A})$ sei ein komplexer Raum. Das maximale Ideal des Halmes $\mathcal{A}_x$ werde mit $\mathfrak{m}_x$ bezeichnet ($x \in X$). $T_x(X, \mathcal{A}) := \mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2$ ist ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$, $\dim T_x(X, \mathcal{A}) = \text{emdim}_x(X, \mathcal{A})$. Es sei $\mathcal{T}_x(X, \mathcal{A})$ die Gesamtheit der linearen Abbildungen $T : \mathcal{A}_x \rightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $T(f \cdot g) = f(x) T(g) + g(x) \cdot T(f)$ für alle $f, g \in \mathcal{A}_x$. Auch $\mathcal{T}_x(X, \mathcal{A})$ ist ein endlich-dimensionaler Vektorraum über $\mathbb{C}$. Den folgenden Satz hat HOLMANN [20, prop. 1] für reduzierte Räume bewiesen:

(6.1) Satz.

Für alle Punkte $x \in X$ ist $\mathcal{T}_x(X, \mathcal{A})$ in natürlicher Weise isomorph zum dualen Raum von $T_x(X, \mathcal{A})$. Speziell gilt:
 $\text{emdim}_x(X, \mathcal{A}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{T}_x(X, \mathcal{A})$. ---

Beweis: Für alle $T \in \mathcal{T}_x(X, \mathcal{A})$ gilt $T(\mathfrak{m}_x^2) = T(\mathbb{C}) = 0$. Also gibt es eine lineare Abbildung $\alpha(T) := T \circ \varphi_x^{-1}$ von $T_x(X, \mathcal{A})$ in $\mathbb{C}$, so daß für den surjektiven Homomorphismus $\varphi_x : \mathcal{A}_x \rightarrow T_x(X, \mathcal{A})$, $f \rightsquigarrow (f - f(x)) \bmod \mathfrak{m}_x^2$ das Diagramm



kommutativ ist. Bezeichnen wir mit $T_x(X, \mathcal{A})^*$ den dualen Vektorraum von $T_x(X, \mathcal{A})$, so ist die Abbildung

$$\alpha : \mathcal{T}_x(X, \mathcal{A}) \rightarrow T_x(X, \mathcal{A})^*$$

ein Vektorraum-Isomorphismus, denn: Für $t \in T_x(X, \mathcal{A})^*$ ist $T := t \circ \varphi_x \in \mathcal{T}_x(X, \mathcal{A})$ mit $\alpha(T) = t$; α ist surjektiv. Ist $\alpha(T) = 0$, so gilt $0 = T \circ \bar{\varphi}_x^{-1}(T_x(X, \mathcal{A})) = T(\mathcal{A}_x)$, $T = 0$; α ist injektiv.

$\bar{\alpha}^{-1} : T_x(X, \mathcal{A})^* \rightarrow \mathcal{T}_x(X, \mathcal{A})$, $t \mapsto t \circ \varphi_x$, ist ein Homomorphismus. ---

Definition.

Wir nennen $T_x(X, \mathcal{A})$ bzw. $\mathcal{T}_x(X, \mathcal{A})$ den "contra- bzw. covarianten Tangentialraum" von $(X, \mathcal{A})$ im Punkte x . ---

Contra- und covariant soll sich auf das Verhalten dieser Vektorräume bei holomorphen Abbildungen zwischen komplexen Räumen beziehen, wie wir es jetzt beschreiben wollen:

Es sei $(\tau, \tau^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ eine holomorphe Abbildung. Für jeden Punkt $x \in X$ definieren wir zu den schon bekannten Homomorphismen

$$\tau_x^* : \mathcal{B}_{\tau(x)} \rightarrow \mathcal{A}_x, \quad \tilde{\tau}_x : \mathcal{L}_{\tau(x)} \rightarrow \mathcal{A}_x \quad \text{und}$$

$$\delta \tau_x : T_{\tau(x)}(Y, \mathcal{B}) \rightarrow T_x(X, \mathcal{A})$$

einen weiteren

$$d\tau_x : \mathcal{T}_x(X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{T}_{\tau(x)}(Y, \mathcal{B}), \quad T \mapsto T \circ \tau_x^*.$$

Aus der Definition ersehen wir sofort, daß $d\tau_x$ die zu $\delta \tau_x$ duale Abbildung ist [2, Chap. II, § 2, n° 5].

Die Bezeichnung contravarianter Tangentialraum weicht von der üblichen ab. $T_x(X, \mathcal{A})$ wird für eine Mannigfaltigkeit

"covarianter Tangentialraum" genannt, siehe GRAUERT [16] .

Wir wollen jedoch unsere Definition rechtfertigen :

Die elementfremden Summen

$$T(X, \mathcal{A}) := \bigcup_{x \in X} T_x(X, \mathcal{A}) \quad \text{und} \quad \mathcal{T}(X, \mathcal{A}) := \bigcup_{x \in X} \mathcal{T}_x(X, \mathcal{A})$$

heißen "contra- und covarianter Tangentialraum von $(X, \mathcal{A})$ ".

Die komponentenweise definierten Abbildungen

$$\delta\tau : T(Y, \mathcal{B}) \rightarrow T(X, \mathcal{A}) \quad \text{und} \quad d\tau : \mathcal{T}(X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{T}(Y, \mathcal{B})$$

mit

$$\delta\tau|_{T_{\mathcal{A}(x)}(Y, \mathcal{B})} \equiv \delta\tau_x \quad \text{und} \quad d\tau|_{\mathcal{T}_x(X, \mathcal{A})} \equiv d\tau_x$$

für jeden Punkt $x \in X$ sollen Morphismen genannt werden.

$\mathcal{K}$, $\mathcal{T}$ bzw. T bezeichne die Kategorien (vgl. mit GODEMENT [12] und MACLANE [22]) mit den Objekten $(X, \mathcal{A})$, $\mathcal{T}(X, \mathcal{A})$ bzw. $T(X, \mathcal{A})$ und den Morphismen $(\tau, \tau^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$, $\mathcal{T}(X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{T}(Y, \mathcal{B})$ bzw. $T(Y, \mathcal{B}) \rightarrow T(X, \mathcal{A})$.

Die Funktoren

$$d : \mathcal{K} \rightarrow \mathcal{T} \quad \text{und} \quad \delta : \mathcal{K} \rightarrow T$$

sind auf kanonische Weise definiert :

$$(X, \mathcal{A}) \rightsquigarrow \mathcal{T}(X, \mathcal{A}) \quad , \quad (X, \mathcal{A}) \rightsquigarrow T(X, \mathcal{A}) \quad ;$$

$$(\tau, \tau^*) \rightsquigarrow d\tau \quad , \quad (\tau, \tau^*) \rightsquigarrow \delta\tau$$

Dann ist d covariant und δ contravariant :

$$(\tau, \tau^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B}) \quad \text{und} \quad (\sigma, \sigma^*) : (Y, \mathcal{B}) \rightarrow (Z, \mathcal{C})$$

seien holomorphe Abbildungen.

Wir erhalten :

$$d((\sigma, \sigma^*) \circ (\tau, \tau^*)) = (d\sigma) \circ (d\tau) \quad \text{und}$$

$$\delta((\sigma, \sigma^*) \circ (\tau, \tau^*)) = (\delta\tau) \circ (\delta\sigma) . \quad \text{---}$$

Betrachten wir wieder eine feste holomorphe Abbildung

$$(\tau, \tau^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B}) , \quad \text{so sind im } \delta\tau_x \quad \text{und} \quad \ker d\tau_x$$

Untervektorräume von $T_x(X, \mathcal{A})$ bzw. $\mathcal{T}_x(X, \mathcal{A})$. Die

Dualität von $d\tau_x$ und $\delta\tau_x$ macht folgende Definition

sinnvoll :

$$\text{corg}_x(\tau, \tau^*) := \text{codim}(\text{im } \delta\tau_x) = \dim T_x(X, \mathcal{A}) - \dim(\text{im } \delta\tau_x)$$

$$= \dim(\ker d\tau_x) \quad \text{hei\ss e der "Corang von } (\tau, \tau^*) \text{ im Punkte}$$

$x \in X$. Entsprechend wird der "Rang von } (\tau, \tau^*)" definiert:

$$\text{rg}_x(\tau, \tau^*) := \dim(\text{im } \delta\tau_x) = \text{codim}(\ker d\tau_x) =$$

$$= \dim \mathcal{T}_x(X, \mathcal{A}) - \dim(\ker d\tau_x) . \quad \text{---}$$

Vorsehen wir die Faser $M := \tau^{-1}(\tau(x))$, $x \in X$, mit der

τ -Struktur $\mathcal{U}_y$, so ist $(M, \mathcal{U}_y)$ ein Unterraum von $(X, \mathcal{A})$

mit $\text{endim}_x(M, \mathcal{U}_y) = \text{corg}_x(\tau, \tau^*)$ für alle $x \in M$. Denn

betrachten wir das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{B}_{\tau(x)} & \longrightarrow & \mathcal{b}_{\tau(x)} & \xrightarrow{\pi_2} & \mathcal{b}_{\tau(x)} / \mathcal{b}_{\tau(x)}^2 \\ \downarrow \tau_x^* & & \downarrow \tilde{\tau}_x & & \downarrow \delta\tau_x \\ \mathcal{A}_x & \longrightarrow & \mathcal{a}_x & \xrightarrow{\pi_1} & \mathcal{a}_x / \mathcal{a}_x^2 \end{array} ,$$

so sehen wir sofort, da\ss für $\mathcal{U}_y = (\mathcal{A}/I) \mid M$

$$\text{endim}_x(M, \mathcal{U}_y) = \dim \left\{ (\mathcal{a}_x / I_x) / (\mathcal{a}_x / I_x)^2 \right\}$$

$$= \dim(\mathcal{a}_x / \mathcal{a}_x^2 + I_x) = \dim(\mathcal{a}_x / \mathcal{a}_x^2) - \dim(\mathcal{a}_x^2 + I_x / \mathcal{a}_x^2)$$

$$= \text{endim}_x(X, \mathcal{A}) - \dim \left\{ \pi_1(\mathcal{a}_x^2 + \tilde{\tau}_x(\mathcal{b}_{\tau(x)})) \right\}$$

$$= \text{endim}_x(X, \mathcal{A}) - \dim(\delta\tau_x \circ \pi_2(\mathcal{b}_{\tau(x)}))$$

$$= \text{endim}_x(X, \mathcal{A}) - \dim(\text{im } \delta\tau_x) = \text{corg}_x(\tau, \tau^*) . \quad \text{---}$$

(6.2) Satz.

Eine holomorphe Abbildung $(\tau, \tau^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ ist regulär in einem Punkte $x \in X$, wenn eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist :

- (a) $\tau_x^* : \mathcal{B}_{\tau(x)} \rightarrow \mathcal{A}_x$ ist surjektiv .
- (b) $\tilde{\tau}_x : \mathcal{A}_{\tau(x)} \rightarrow \mathcal{A}_x$ ist surjektiv .
- (c) $\delta\tau_x : T_{\tau(x)}(Y, \mathcal{B}) \rightarrow T_x(X, \mathcal{A})$ ist surjektiv .
- (d) $d\tau_x : \mathcal{T}_x(X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{T}_{\tau(x)}(Y, \mathcal{B})$ ist injektiv .
- (e) $\text{rg}_x(\tau, \tau^*) = \text{emdim}_x(X, \mathcal{A})$.
- (f) $\text{corg}_x(\tau, \tau^*) = 0$.
- (g) $\text{emdim}_x(\tau^{-1}(\tau(x)), \mathcal{A}) = 0$, falls $\mathcal{A}$ die τ -Struktur auf der Faser $\tau^{-1}(\tau(x))$ ist . ---

Die Äquivalenz von (a) bis (c) ist nach Hilfssatz (1.2) klar, die von (c) bis (g) nach dem vorher Gesagten. Wegen (g) folgt aus der Regularität von (τ, τ^*) , daß die stetige Abbildung $\tau : X \rightarrow Y$ diskret ist.

Wir wollen uns noch mit speziellen holomorphen Abbildungen befassen : $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{A} := H^0(X, \mathcal{A})$ seien endlich viele holomorphe Funktionen auf $(X, \mathcal{A})$, $f := (f_1, \dots, f_k)$ definiert eine stetige Abbildung $gf : X \rightarrow \mathbb{C}^k$ und induziert eine holomorphe Abbildung $(gf, f^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{C}^k, \mathcal{O}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^k(x)}$ ist isomorph zu $\mathbb{C}[\langle z_1 - f_1(x), \dots, z_k - f_k(x) \rangle]$. Die Elemente von $\mathcal{O}_{f(x)}$ haben also die Gestalt

$$\alpha = \sum_{v_1, \dots, v_k=0}^{\infty} a_{v_1, \dots, v_k} (z_1 - f_1(x))^{v_1} \dots (z_k - f_k(x))^{v_k}$$

mit $a_{v_1, \dots, v_k} \in \mathbb{C}$. Wie im §2 ausgeführt wurde, ist

$$f_x^*(\alpha) = \sum_{v_1, \dots, v_k \geq 0} a_{v_1, \dots, v_k} (f_1 - f_1(x))^{v_1} \dots (f_k - f_k(x))^{v_k}$$

ein Element von $\mathcal{A}_x$. Hieraus sehen wir sofort :

$(gf, f^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{C}^k, 0)$ ist genau dann regulär in $x \in X$, wenn für das maximale Ideal $\mathfrak{m}_x \subset \mathcal{A}_x$ gilt :

$$\mathfrak{m}_x = \sum_{k=1}^k \mathcal{A}_x (f_k - f_k(x)) . ---$$

Der (Co-)Rang von (gf, f^*) in x stimmt also mit der (Co-)Dimension des Vektorraumes überein, der von den Elementen $f_k - f_k(x) \bmod \mathfrak{m}_x^2$ in $T_x(X, \mathcal{A})$ erzeugt wird .

Ist B ein Vektorraum von globalen holomorphen Funktionen auf $(X, \mathcal{A})$, $B \subset A := H^0(X, \mathcal{A})$, so induziert die stetige Abbildung $\beta : X \rightarrow \mathbb{C}^B$, $x \rightsquigarrow (f(x))_{f \in B}$, Algebra-Homomorphismen β_x^* , $\tilde{\beta}_x$ und $\delta\beta_x$ für alle $x \in X$:

$$\beta_x^* : \mathbb{C}[\langle T_f - f(x) \rangle_{f \in B}] \rightarrow \mathcal{A}_x , .$$

$$\begin{array}{c} \sum_{v_1 \dots v_k \geq 0} a_{v_1 \dots v_k} (T_{f_1} - f_1(x))^{v_1} \dots (T_{f_k} - f_k(x))^{v_k} \\ \downarrow \\ \sum_{v_1 \dots v_k \geq 0} a_{v_1 \dots v_k} (f_1 - f_1(x))^{v_1} \dots (f_k - f_k(x))^{v_k} . \end{array}$$

Zu $\tilde{\beta}_x$ und $\delta\beta_x$ vergleiche mit Hilfssatz (1.2) . ---

(6.3) Satz.

Ist $(\tau, \tau^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ eine holomorphe Abbildung, so ist die Gesamtheit derjenigen Punkte aus X , in denen der Corang von (τ, τ^*) größer oder gleich einer Konstanten ist, eine analytische Menge in X . In Formeln : Für jede Zahl r ist $X_r(\tau, \tau^*) := \{x \in X : \text{corang}_x(\tau, \tau^*) \geq r\} \subset X$ analytisch . ---

Für reduzierte komplexe Räume hat HOLMANN [20, prop. 5] diesen Satz bewiesen.

(6.4) Corollar.

$\{x \in X : \text{emdim}_X(X, \mathcal{A}) \geq r\}$ ist für jede Zahl r eine analytische Menge in $(X, \mathcal{A})$; die Singularitätenmenge S von $(X, \mathcal{A})$ ist ebenfalls analytisch. ---

Der erste Teil ist richtig, weil für jede konstante Abbildung (τ, τ^*) und alle $x \in X$ gilt $\text{emdim}_X(X, \mathcal{A}) = \text{corg}_X(\tau, \tau^*)$. Sind X_i ($i \in I$) die irreduziblen Komponenten von X , so ist $S = \{x \in X : \text{emdim}_X(X, \mathcal{A}) > \dim_x X\} = \bigcup_{i \in I} (\{x \in X : \text{emdim}_X(X, \mathcal{A}) > \dim X_i\} \cap X_i)$ analytisch, weil die einzelnen Mengen $\{\dots\} \cap X_i$ analytisch sind, und die Vereinigung lokal endlich ist. Für reduzierte Räume hat bereits CARTAN [6] die Analytizität der Singularitätenmenge bewiesen. ---

Aus (6.3) können wir auch sofort entnehmen, daß eine in einem Punkte reguläre Abbildung stets in einer ganzen Umgebung regulär ist, wie wir bereits erwähnten.

Weil die Aussage (6.3) von lokaler Natur ist, können wir zum Beweis o.B.d.A. die folgende Situation betrachten: X ist eine analytische Menge in einem Polyzylinder G eines $\mathbb{C}^n$ mit $\mathcal{A} = (\mathcal{O}/I)|_X$ für eine kohärente Idealgarbe I der Garbe $\mathcal{O}$ der Holomorphie auf G mit X als Nullstellenmenge. I werde erzeugt durch die holomorphen Funktionen $i_1, \dots, i_r \in H^0(G, \mathcal{O})$, für $w \in G$ sei $I_w = \sum_{j=1}^r \mathcal{O}_w i_j$. $\mathcal{M}_w$ sei das maximale Ideal von $\mathcal{O}_w$. Es ist $I_w \subset \mathcal{M}_w$. Y sei in gleicher Weise in den $\mathbb{C}^m$ eingebettet, und (τ, τ^*) werde auf die in Anschluß an Satz (6.2) beschriebene Art durch ein m -Tupel $(f_1, \dots, f_m)$ von auf G holomorphen Funktionen $f_i \in H^0(G, \mathcal{O})$ gegeben. Wir betrachten für $x \in X$ den Vektorraum

$$T_x(X, \mathcal{A}) = \mathcal{M}_x / \mathcal{M}_x^2 = (\mathcal{M}_x / I_x) / (\mathcal{M}_x / I_x)^2 = \mathcal{M}_x / (\mathcal{M}_x^2 + I_x)$$

und den Homomorphismus

$$\partial_x : \mathcal{M}_x \rightarrow \mathcal{M}_x / \mathcal{M}_x^2, f \mapsto f \bmod \mathcal{M}_x^2.$$

Ist $\alpha_1(x)$ die Dimension des Bildes von I_x bei λ_x , so gilt einerseits

$$\alpha_1(x) = \operatorname{rg}_x \left(\frac{\partial i_g}{\partial w_v} \right)_{\substack{g=1, \dots, r \\ v=1, \dots, n}},$$

weil der Vektorraum $\mathcal{M}_w / \mathcal{M}_w^2$ isomorph zu

$$\sum_{v_1 + \dots + v_n = 1} \mathbb{C} (T_1 - w_1)^{v_1} \dots (T_n - w_n)^{v_n}$$

ist für alle $w = (w_1, \dots, w_n) \in G$. Es ist außerdem

$$n = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{M}_x / \mathcal{M}_x^2) = \alpha_1(x) + \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{N}_x / \mathcal{N}_x^2),$$

weil $\mathcal{N}_x / \mathcal{N}_x^2$ zu $\lambda_x(I_x)$ in $\mathcal{M}_x / \mathcal{M}_x^2$ komplementär ist.

Wir erhalten als Zwischenergebnis :

$$\operatorname{emdim}_x(X, \mathcal{A}) = n - \alpha_1(x).$$

Auf ähnliche Weise können wir die Dimension von $\operatorname{im} \delta \tau_x$ als Rang einer Funktionalmatrix darstellen, die natürlich von den f_μ ($\mu=1, \dots, m$) und den i_g ($g=1, \dots, r$) abhängt :

$$\begin{aligned} \alpha_2(x) &:= \dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{im} \delta \tau_x) = \\ &= \inf \left\{ \operatorname{rg}_x \left(\frac{\partial f_\mu}{\partial w_v} + \sum_{g=1}^r a_{g\mu} \frac{\partial i_g}{\partial w_v} \right) : a_{g\mu} \in \mathbb{C} \right\} = \\ &= \operatorname{rg}_x \left(\frac{\partial i_g}{\partial w_v}, \frac{\partial f_\mu}{\partial w_v} \right) = \operatorname{rg}_x \left(\frac{\partial i_g}{\partial w_v} \right). \end{aligned}$$

Setzen wir für den ersten Summanden $\alpha(x)$, so erhalten wir für alle $x \in X$:

$$\begin{aligned} \operatorname{corg}_x(\tau, \tau^*) &= \dim_{\mathbb{C}} T_x(X, \mathcal{A}) - \dim_{\mathbb{C}}(\operatorname{im} \delta \tau_x) = \\ &= n - \alpha_1(x) - \alpha_2(x) = n - \alpha(x). \end{aligned}$$

$X_r(\tau, \tau^*) = \{x \in X : \alpha(x) \leq n - r\}$ stimmt also mit der simultanen Nullstellenmenge aller $(n - r + 1)$ -reihigen Unterdeterminanten der Matrix

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial w_v}, \frac{\partial f_m}{\partial w_v} \right) \in M(n \times (r+m), H^0(G, \mathcal{O}))$$

überein. Darum ist $X_r(\tau, \tau^*)$ analytische Teilmenge von X , und der Satz von HOLMANN ist auch für GRAUERTsche Räume bewiesen. ---

Es sollte noch bemerkt werden, daß eine spezielle Einbettung von Y in den $\mathcal{U}^m$ gar nicht zum Beweis von (6.3) verwendet wurde. Das können wir jedoch einfach erklären: Die (lokale) Einbettungsabbildung $(Y, \mathcal{B}) \subset (\mathcal{U}^m, \mathcal{O}_m)$ ist regulär; sie spielt also bei der Betrachtung des Coranges keine Rolle. ---

§ 7. Reguläre Abbildungen.

Es sei $(\tau, \tau^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ eine holomorphe Abbildung komplexer Räume $(X, \mathcal{A})$ und $(Y, \mathcal{B})$. Wir wollen nun untersuchen, ob es holomorphe Abbildungen (f, f^*) von $(X, \mathcal{A})$ in $(\mathbb{C}^k, \mathcal{C}^0)$ gibt, so daß

$$((\tau, f), (\tau, f)^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B}) \times (\mathbb{C}^k, \mathcal{C}^0)$$

regulär ist.

Der folgende Spezialfall dieser Aufgabe wurde mehrfach gelöst, vgl. auch mit NARASIMHAN [24, Lemma 3] :

Ist $(X, \mathcal{O})$ eine n -dimensionale STEINSche Mannigfaltigkeit, $\tau : X \rightarrow \{y\}$ eine konstante Abbildung ($\tau_X^* : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{O}_X$ ist die Injektion, $\{y\} \times \mathbb{C}^k$ ist biholomorph äquivalent zu $\mathbb{C}^k$), Dann gilt :

Die Menge der regulären holomorphen Abbildungen von X in den $\mathbb{C}^{2n}$ ist fett in H^{2n} , $H = H^0(X, \mathcal{O})$. ---

Es genügt auch statt STEINSch zu fordern, daß X lokale Koordinaten durch globale Funktionen und abzählbare Topologie besitzt.

Wir wollen den Fall ganz allgemein behandeln. A bezeichne die Algebra der holomorphen Funktionen auf $(X, \mathcal{A})$, versehen mit der im Paragraphen 2 beschriebenen Topologie, so daß die Reduktionsabbildung

$$\mathcal{G} : A \rightarrow H = H^0(X, \mathcal{A}_r)$$

stetig ist. Wir betrachten die lineare und stetige Abbildung

$$\gamma_x : A \rightarrow T_x(X, \mathcal{A}), f \mapsto (f - f(x)) \bmod \mathfrak{a}_x^2,$$

und zeigen :

(7.1) Lemma.

B sei ein Untervektorraum von A , $B : X \rightarrow \mathbb{C}^B$, $x' \rightsquigarrow (f(x'))$,
und x ein fester Punkt aus X .

Dann sind folgende Aussagen gleichwertig :

- (a) $(X, \mathcal{A})$ besitzt in x lokale Koordinaten durch globale Funktionen aus B .
- (b) $\delta_x(B) = T_x(X, \mathcal{A})$.
- (c) B ist regulär im Punkte x .
- (d) B_x^* (oder $\tilde{B}_x$, oder gar δB_x) ist surjektiv. ---

Aus (a) folgt (b) : Die Funktionen $f_1, \dots, f_k \in B$ mögen eine Umgebung U von x regulär in den $\mathbb{C}^k$ abbilden. Dann ist die durch die Verbindung $f = (f_1, \dots, f_k)$ induzierte contravariante Tangential-Abbildung

$$\delta f_x : T_{f(x)}(\mathbb{C}^k, \mathbb{C}^0) \rightarrow T_x(X, \mathcal{A})$$

surjektiv, und jedes $\alpha \in T_x(X, \mathcal{A})$ hat die Gestalt :

$$\alpha = \left\{ \sum_{v_1 + \dots + v_k = 1} a_{v_1 \dots v_k} (f_1 - f_1(x))^{v_1} \dots (f_k - f_k(x))^{v_k} \right\} \bmod \mathbb{C}_x^2$$

$$= \delta_x(a_{10 \dots 0} f_1 + \dots + a_{0 \dots 01} f_k) \in \delta_x(B) .$$

Aus (b) folgt (a) : Der Tangentialraum $T_x(X, \mathcal{A}) = \mathcal{A}_x / \mathcal{A}_x^2$ ist ein Vektorraum über $\mathbb{C}$ der Dimension $\text{emdim}_x(X, \mathcal{A}) =: 1 < \infty$. Deshalb gibt es holomorphe Funktionen $g_1, \dots, g_l \in B$, deren Bilder $\delta_x(g_\lambda)$ ($\lambda=1, \dots, l$) ganz $T_x(X, \mathcal{A})$ aufspannen. Ihre Verbindung $g = (g_1, \dots, g_l) \in B^1 \subset A^1$ induziert eine holomorphe Abbildung

$$(\varphi g, g^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{C}^1, \mathbb{C}^0) ,$$

die im Punkte $x \in X$ regulär ist. Nach Satz (6.3) gibt es

dann eine Umgebung U von x , so daß

$$(g, g^*) : (U, \mathcal{A}|_U) \rightarrow (\mathbb{C}^1, \mathcal{I})$$

eine reguläre Abbildung ist.

Die Äquivalenzen (b) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftrightarrow$ (d) folgen aus einer Bemerkung im Anschluß an Satz (6.2), denn es gilt : $\gamma_x(B) = \text{im } \delta B_x$.

Bei Anwendung des Satzes von BANACH (siehe § 1) können wir aus unserem Lemma sofort schließen, daß $\gamma_x : B \rightarrow T_x(X, \mathcal{A})$ für einen abgeschlossenen Untervektorraum B von A und alle $x \in X$ eine offene Abbildung ist, wenn $(X, \mathcal{A})$ lokale Koordinaten durch Funktionen aus B und abzählbare Topologie besitzt.

Für beliebige holomorphe Abbildungen (τ, τ^*) führen wir die folgenden Abkürzungen ein :

$$n_x(\tau, \tau^*) := \dim_x \{ y \in X : \text{corg}_y(\tau, \tau^*) \geq \text{corg}_x(\tau, \tau^*) \}.$$

Diese erste Festsetzung ist sinnvoll, weil für jede Konstante k nach Satz (6.3) $\{ y \in X : \text{corg}_y(\tau, \tau^*) \geq k \}$ eine analytische Menge ist.

$$b_x(\tau, \tau^*) := \begin{cases} 0 & \text{falls } \text{corg}_x(\tau, \tau^*) = 0 \\ \text{corg}_x(\tau, \tau^*) + n_x(\tau, \tau^*) & \text{falls } \text{corg}_x(\tau, \tau^*) \geq 1 \end{cases}$$

$$b(\tau, \tau^*) := \sup_{x \in X} b_x(\tau, \tau^*) \leq \text{emdim}(X, \mathcal{A}) + \dim X.$$

Nun können wir den Hauptsatz dieses Paragraphen formulieren und beweisen, dazu vgl. mit O.FORSTER [10, Satz 5.4] :

(7.2) Satz.

$(X, \mathcal{A})$ sei ein komplexer Raum mit abzählbarer Topologie, der lokale Koordinaten durch Funktionen aus einem abgeschlossenen Untervektorraum B von $A = H^0(X, \mathcal{A})$ besitzt.

$(\tau, \tau^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ sei eine holomorphe Abbildung mit endlichem Wert $b := b(\tau, \tau^*)$.

Dann ist die Gesamtheit $R(\tau, \tau^*)$ aller b -Tupel $f \in b^0$, die eine reguläre Abbildung

$$((\tau, f), (\tau, f)^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B}) \times (\mathbb{C}^b, \mathbb{C}^0)$$

induzieren, fett in B^b . ---

(7.3) Corollar.

Sind $m := \text{emdim}(X, \mathcal{A})$ und $n := \dim X$ endlich, so ist die Menge aller regulären Abbildungen in B^{n+m} fett. ---

Der Beweis ergibt sich mittels Hilfssatz (1.1) aus Folgendem : $b(\tau, \tau^*) \leq n+m$ für jede konstante Abbildung $X \rightarrow \{y\}$, $(\{y\}, \mathbb{C}) \times (\mathbb{C}^b, \mathbb{C}^0)$ ist biholomorph äquivalent zu $(\mathbb{C}^b, \mathbb{C}^0)$. ---

(7.4) Corollar.

Der reduzierte komplexe Raum $(X, \mathcal{A})$ sei vom abzählbaren Typ, besitze lokale Koordinaten durch globale Funktionen aus $A = H^0(X, \mathcal{A})$, $n = \dim X$ und $m = \text{emdim}(X, \mathcal{A})$ seien endlich mit $m \geq n+1$. Dann ist die Gesamtheit aller regulären Abbildungen in A^{n+m-1} fett.

Ist $(X, \mathcal{A})$ außerdem normal, d.h. jeder Halm $\mathcal{A}_x$ ist ganz abgeschlossen, und $m \geq n+2$, so liegt die Menge aller regulären Abbildungen in A^{n+m-2} fett. ---

Zum Beweis genügt es zu zeigen, daß $b(\tau, \tau^*)$ für eine konstante Abbildung höchstens $n+m-1$ (bzw. $n+m-2$) ist. $m > n$ bedeutet aber, daß $(X, \mathcal{A})$ mindestens eine singuläre Stelle $x \in X$ besitzt. Weil X reduziert (bzw. normal) ist, wissen wir, daß die Singularitätenmenge S von X eine höchstens 1- (bzw. 2-) codimensionale analytische Menge ist. Es gilt für Punkte $s \in S$:

$n_s = \dim_s \{ y \in X : \text{emdim}_y(X, \mathcal{R}) \geq \text{emdim}_s(X, \mathcal{R}) \} \leq n-1$,
 (bzw. $n_s \leq n-2$), d.h. $b_s = n_s + \text{emdim}_s(X, \mathcal{R}) \leq n-1+m$ (bzw.
 $b_s \leq n-2+m$). Ist $x \in (X \setminus S)$, so gilt $b_x \leq 2n \leq n+m-1$
 (oder $b_x \leq n+m-2$). Also ist $b = \sup b_x \leq n+m-1$ oder im
 normalen Fall $b \leq n+m-2$. ---

Für nichtreduzierte Räume ist die Aussage (7.4) i.a. falsch,
 weil die Einbettungsdimension konstant sein kann. Dann wäre
 die Singularitätenmenge nicht niederdimensional. Wir wollen
 für diesen Fall ein einfaches Beispiel angeben:

$X := \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{C}^m$, $m > 0$. $\mathcal{O} := {}_m\mathcal{O} \subset \mathcal{M}_X \subset \mathcal{O}_X$ bezeich-
 ne das maximale Ideal für $x \in \mathbb{C}^m$. Die Garbe $\mathcal{I}$ auf $\mathbb{C}^m$ habe
 die Halme $\mathcal{I}_x = \mathcal{O}_x$ für $x \neq x_v$ und $\mathcal{I}_{x_v} = \mathcal{M}_{x_v}^2$. $\mathcal{I}$ ist ko-
 härent mit $V(\mathcal{I}) = X$. $\mathcal{R} := (\mathcal{O}/\mathcal{I})|_X$ definiert auf X eine
 nichtreduzierte komplexe Struktur. Es ist $\dim X = 0$,
 $\text{emdim}_{x_v}(X, \mathcal{R}) = m > 0$ und $n_{x_v} = m$ sowie $b_{x_v} = m$ für
 alle $v=1, \dots, n$. ---

Beweis von Satz (7.2):

(a) Wir zeigen zunächst durch vollständige Induktion
 nach b , daß $R(\tau, \tau^*)$ dicht in B^b ist.

Für $b = 0$ gilt $\text{corg}_x(\tau, \tau^*) = 0$ für alle $x \in X$, und
 (τ, τ^*) ist nach Definition regulär. Jede Abbildung aus
 $B^0 = \{0\}$ hat die gewünschte Eigenschaft.

Es sei also $b \geq 1$. $c := c(\tau, \tau^*) = \sup_{x \in X} \text{corg}_x(\tau, \tau^*) \leq$
 $\text{emdim}(X, \mathcal{R})$. Dann gilt:

$$b = \sup_{1 \leq v \leq c} \{v + \dim X_v(\tau, \tau^*)\}$$

mit $X_v(\tau, \tau^*) := \{x \in X : \text{corg}_x(\tau, \tau^*) \geq v\}$.

Wir zerlegen jedes $X_v(\tau, \tau^*)$ in irreduzible Komponenten
 $X_{v\alpha}$, und wählen Punkte $x_{v\alpha}$ aus $X_{v\alpha} \setminus X_{v+1}(\tau, \tau^*)$ für

alle $v=1, \dots, c$ und alle $c=1, 2, 3, \dots$.

$$\Gamma := \bigcap_{c=1}^{\infty} \bigcap_{v=1}^c \{f \in B : \text{corg}_{X_{VC}}((\tau, f), (\tau, f)^*) = \text{corg}_{X_{VC}}(\tau, \tau^*) - 1\}.$$

Um zu sehen, daß Γ dicht in B ist, benötigen wir die folgende Aussage :

(7.5) Hilfssatz.

Ist $x \in X$ mit $\text{corg}_X(\tau, \tau^*) \geq 1$, so liegt

$$\Gamma_x := \{f \in B : \text{corg}_X((\tau, f), (\tau, f)^*) = \text{corg}_X(\tau, \tau^*) - 1\}$$

offen und dicht in B . ---

Es genügt zu zeigen, daß $\Gamma_x = \gamma_x^{-1}(T_x(X, \mathcal{R}) \setminus \text{im } \delta\tau_x)$ ist.

Denn $\gamma_x : B \rightarrow T_x(X, \mathcal{R})$ ist offen und stetig, und $\text{im } \delta\tau_x$ ist wegen der Voraussetzung $\text{corg}_X(\tau, \tau^*) \geq 1$ ein nirgends dichter, abgeschlossener Untervektorraum von $T_x(X, \mathcal{R})$.

Wir erhalten folgende Kette äquivalenter Aussagen :

$$f \in \Gamma_x \iff \text{corg}_X((\tau, f), (\tau, f)^*) = \text{corg}_X(\tau, \tau^*) - 1$$

$$\iff \dim \{ \text{im } \delta(\tau, f)_x \} = 1 + \dim (\text{im } \delta\tau_x)$$

$$\iff \gamma_x(f) \notin \text{im } \delta\tau_x$$

$$\iff f \in \gamma_x^{-1}(T_x(X, \mathcal{R}) \setminus \text{im } \delta\tau_x).$$

Hieraus folgt die Behauptung. ---

Γ ist sogar fett in B .

Ist $v + \dim X_v(\tau, \tau^*) = b(\tau, \tau^*)$, so gilt für alle $f \in \Gamma$:

$$\dim X_v((\tau, f), (\tau, f)^*) \leq \dim X_v(\tau, \tau^*) - 1.$$

Deshalb erhalten wir

$$b((\tau, f), (\tau, f)^*) \leq b(\tau, \tau^*) - 1 = b-1,$$

und wir können auf jede Abbildung

$$((\tau, f), (\tau, f)^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B}) \times (\mathbb{C}, \mathbb{C})$$

mit $f \in \Gamma$ die Induktionsvoraussetzung anwenden. Aus Hilfssatz (1.1) folgt nun, daß mit $R((\tau, f), (\tau, f)^*) \subset B^{b-1}$ auch $R(\tau, \tau^*)$ dicht in B^b liegt.

(b) $R(\tau, \tau^*)$ ist fett in B^b .

Da X abzählbare Topologie hat, genügt es zu zeigen, daß jeder Punkt $x_0 \in X$ eine offene Umgebung $U_0 \subset X$ besitzt, so daß die Menge

$$R_{U_0}(\tau, \tau^*) := \left\{ f \in B^b : ((\tau, f), (\tau, f)^*) \text{ ist regulär auf } U_0 \right\}$$

fett ist. Wir wählen eine Umgebung $U = \overset{0}{U} \subset X$ von x_0 , so daß $(U, \mathcal{A}|_U)$ mit einem komplexen Unterraum eines Polyzylinders $(Z, \mathbb{C})$ im $\mathbb{C}^n$ mit Mittelpunkt x_0 identifiziert werden kann ($n = \text{emdim}_{x_0}(X, \mathcal{A})$). Es sei $k := \text{emdim}_{\tau(x_0)}(Y, \mathcal{B})$ und $m = k + b$. Wir können o.B.d.A. die folgende Situation betrachten: $\mathcal{A}|_U = (\mathbb{C}/I)|_U$ mit einer kohärenten $\mathbb{C}$ -Garbe I auf Z , die U als Nullstellenmenge hat; $H^0(U, \mathcal{A}) = H^0(Z, \mathbb{C})/H^0(Z, I)$. Die Funktionen $i_1, \dots, i_r \in H^0(Z, \mathbb{C})$ mögen I erzeugen. Die holomorphe Abbildung

$$((\tau, f), (\tau, f)^*) : (U, \mathcal{A}|_U) \rightarrow (Y \times \mathbb{C}^b, \mathcal{B} \times \mathbb{C}^b)$$

für ein festes $f \in R(\tau, \tau^*)$ wird induziert durch Funktionen $f_1, \dots, f_m \in H^0(Z, \mathbb{C})$, so daß $f = (f_{k+1}, \dots, f_m)$ ist. $w_1, \dots, w_n$ seien Koordinaten im Polyzylinder Z . Dann gilt für

$$S_f(x) := \text{rg}_x \left(\frac{\partial i_j}{\partial w_v}, \frac{\partial f_{\mu}}{\partial w_v} \right) \begin{matrix} s = 1, \dots, r \\ \mu = 1, \dots, m \\ v = 1, \dots, n \end{matrix}$$

nach dem Beweis von Satz (6.3) :

$$0 = \text{corg}_x((\tau, f), (\tau, f)^*) = n - \mathcal{G}_f(x)$$

für alle $x \in U$.

Z_0 sei ein vorgegebener konzentrisch in Z enthaltener Polyzylinder. Es existiert eine offene Umgebung U von f in A^b und ein Polyzylinder Z' mit Mittelpunkt x_0 und $Z_0 \subset Z' \subset Z$, so daß für jede Abbildung $(f_1, \dots, f_k, g_{k+1}, \dots, g_m) = (\tau, g)$ mit $g = (g_{k+1}, \dots, g_m) \in W$ gilt :

$$\mathcal{G}_g(x) = n$$

für alle $x \in U' := U \cap Z'$, d.h. $((\tau, g), (\tau, g)^*)$ ist regulär in den Punkten von U' , $g \in R_{U'}(\tau, \tau^*)$.

$U_0 := U \cap Z_0$ ist eine offene Umgebung von $x_0 \in X$. Zu jedem $f \in R(\tau, \tau^*)$ existiert also eine Umgebung $W_f \subset B^b$, die ganz in $R_{U_0}(\tau, \tau^*)$ enthalten ist. Die Vereinigung aller W_f für $f \in R(\tau, \tau^*)$ ist offen, dicht und in $R_{U_0}(\tau, \tau^*)$ enthalten. ---

IV. Zusammenfassung.

§ 8. Einbettungsabbildungen.

(8.1) Satz.

Eine holomorphe Abbildung $(\tau, \tau^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ ist genau dann eine Einbettungsabbildung, wenn sie regulär ist, und $\tau : X \rightarrow Y$ eigentlich und injektiv abbildet. ---

Die Notwendigkeit der angegebenen Bedingung ist offensichtlich. Es sei also $(\tau, \tau^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ regulär, $\tau : X \rightarrow Y$ injektiv und eigentlich. $M := \tau(X)$ ist nach einem (bereits zitierten) Satz von REMMERT [28] eine analytische Menge in Y . $\hat{\tau} : X \rightarrow M$, $x \rightsquigarrow \tau(x)$, ist eine topologische Abbildung, weil sie bijektiv, stetig und eigentlich (also abgeschlossen) ist. $\hat{\tau}$ ist eigentlich, weil M als analytischer Teil von Y abgeschlossen ist.

Wir betrachten die $\mathcal{O}$ -te Bildgarbe $\tilde{\mathcal{A}} := \tau_0(\mathcal{A})$ von $\mathcal{A}$ unter der morphen Abbildung (τ, τ^*) als $\mathcal{B}$ -Modulgarbe : $\tilde{\mathcal{A}}(U) = \mathcal{A}(\tau^{-1}(U))$ für alle offenen Mengen $U \subset Y$. Außerdem ist $\tilde{\mathcal{A}}_{\tau(x)} = \mathcal{A}_x = \tau_x^*(\mathcal{B}_{\tau(x)})$, weil (τ, τ^*) regulär ist für alle $x \in X$. Nach GRAUERT [15, Hauptsatz I] ist $\tilde{\mathcal{A}}$ kohärent, weil τ eigentlich und $\mathcal{A}$ kohärent ist. Somit ist auch die Annulator-Garbe $\text{Ann}_{\mathcal{B}}(\tilde{\mathcal{A}}) =: I$ eine kohärente $\mathcal{B}$ -Modulgarbe auf Y . Es gilt :

$$I_y = \begin{cases} \ker \tau_x^* & \text{falls } y = \tau(x), x \in X \\ \mathcal{B}_y & \text{falls } y \in (Y \setminus \tau(X)) \end{cases}.$$

Dann haben wir

$$V(I) := \{y \in Y : I_y + \mathcal{B}_y\} = \tau(X) = M,$$

und $(M, \mathcal{M})$ mit $\mathcal{M} := (\mathcal{A}/I)|_M$ ist ein Unterraum von $(Y, \mathcal{B})$. Für alle $x \in X$ gilt:

$$\mathcal{A}_x = \tau_x^*(\mathcal{B}_{\tau(x)}) = \mathcal{B}_{\tau(x)} / \ker \tau_x^* = \mathcal{B}_{\tau(x)} / I_{\tau(x)} = \mathcal{M}_{\tau(x)}.$$

$\hat{\tau}_x^*$ sei die natürliche Isomorphie $\mathcal{M}_{\tau(x)} \rightarrow \mathcal{A}_x$. Dann ist $(\hat{\tau}, \hat{\tau}^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (M, \mathcal{M})$ eine biholomorphe Abbildung, und alle im Paragraphen 2 angeführten Bedingungen dafür, daß (τ, τ^*) eine Einbettungsabbildung ist, sind erfüllt.

Nun wollen wir den REMBERTschen Einbettungssatz [26] für komplexe Räume im Sinne von GRAUERT [15] in der verschärferten Form von NARASIMHAN [24] und BISHOP [1] beweisen:

(8.2) Einbettungssatz von REMBERT-NARASIMHAN-BISHOP.

$(X, \mathcal{A})$ sei ein holomorph-vollständiger komplexer Raum der Dimension n und der Einbettungsdimension m . $A = H^0(X, \mathcal{A})$ bezeichne die topologische Algebra der globalen holomorphen Funktionen auf $(X, \mathcal{A})$. $k := n + \max \{n+1, m\}$. Dann ist die Gesamtheit aller Einbettungsabbildungen von $(X, \mathcal{A})$ in den $(\mathbb{C}^k, \mathcal{O})$ dicht in A^k . ---

Wir möchten dazu noch einmal bemerken, daß wir für komplexe Räume immer höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten vorausgesetzt haben. Genau in diesem Fall besitzt ein STEINScher Raum abzählbare Topologie.

Nach diesem Einbettungssatz ist es also gar nicht notwendig, abstrakte STEINSche Räume zu betrachten. Wir dürfen uns auf einen $\mathbb{C}^N$ beschränken, wenn wir endliche Einbettungsdimension haben. Die Strukturgarbe $\mathcal{A}$ kann aber auch in diesem Fall recht unübersichtlich sein.

Beweis : Es sei U eine beliebige nichtleere, offene Teilmenge von A^k . Gesucht ist eine Einbettungsabbildung h aus U . Wegen der vorhergehenden Aussage muß h regulär, injektiv und eigentlich sein.

Aus den Sätzen (4.1) und (7.2) in Verbindung mit Hilfssatz (1.1) - die Abbildungen $A^k \rightarrow A^1$, $(f_1, \dots, f_k) \rightsquigarrow (f_1, \dots, f_1)$, für $k \geq 1$ sind offen, surjektiv und stetig - erhalten wir eine injektive und reguläre Abbildung $g \in U$. Wir benutzen jetzt den Satz (5.4) von NARASIMHAN. In unserem Fall definieren wir

$$B(v) := v \cdot (1 + \sup |g(K_{v+1})|)$$

für $v \in \mathbb{N}$ und eine beliebige Ausschöpfung $K_0 \subset K_1 \subset \dots \subset X$. $\tilde{f} \in A^{2n+1}$ mit $\inf |\tilde{f}(X \setminus K_v)| \geq B(v)$ ist eigentlich und kann zu einer eigentlichen Abbildung $f = (\tilde{f}, 0, \dots, 0) \in A^k$ „aufgestockt“ werden, die eigentlich ist, weil sie Verbindung einer stetigen (konstanten) und einer eigentlichen Abbildung ist.

Die k -Tupel $f = (f_1, \dots, f_k)$ und $g = (g_1, \dots, g_k)$ von holomorphen Funktionen auf $(X, \mathcal{A})$ betrachten wir als Spaltenvektoren : $f, g \in M(k \times 1, A)$. Für beliebige Matrizen $a, b \in M(k \times k, \mathbb{C})$ haben wir dann $a g + b f \in A^k$. Es gilt sogar :

(8.3) Hilfssatz.

Für jede nichtsinguläre Matrix $b \in M(k \times k, \mathbb{C})$ definiert $h = a g + b f$ eine eigentliche Abbildung. ---

Es ist $\det b \neq 0$, und die Inverse b^{-1} von b existiert. Deshalb können wir $\gamma := (b^{-1} a) g + f$ definieren. γ ist eigentlich; denn $\inf |\gamma(X \setminus K_v)| \rightarrow \infty$ für $v \rightarrow \infty$.

Das sehen wir so ein : Jedes $x \in (X \setminus K_v)$ ist für ein $c \geq v$ in $K_{c+1} \setminus K_c$ enthalten . Darum ergibt sich aus der Dreiecksungleichung

$$|\gamma(x)| \geq |f(x)| - c|g(x)| ,$$

wenn c die Summe der Absolutbeträge der Koeffizienten von $(b^{-1} a) \in M(k \times k, \mathbb{C})$ ist :

$$c = \sum_{i,j=1}^k |(b^{-1} a)_{ij}| .$$

Weiter folgt :

$$\begin{aligned} |\gamma(x)| &\geq B(c) - c \sup |g(K_{c+1})| \\ &\geq c(1 + \sup |g(K_{c+1})|) - c \sup |g(K_{c+1})| \\ &\geq c + (c - c) \sup |g(K_{c+1})| . \end{aligned}$$

Deshalb ist $\inf |\gamma(X \setminus K_v)| \geq v$, falls $v \geq c$ ist. Natürlich ist auch $h = b\gamma$ eigentlich . ---

Die Gesamtheit R der nichtsingulären Matrizen in $M = M(k \times k, \mathbb{C}) = \mathbb{C}^{k^2}$ ist offen und dicht, weil die Abbildung $\det : M \rightarrow \mathbb{C}$, $b \mapsto \det b$, offen, stetig und surjektiv ist mit $R = M \setminus \det^{-1}\{0\}$ - Hilfssatz (1.1) - . (Die Topologie auf M wird durch die Norm $|b| := \sup |b_{ij}|$ definiert)

Wir betrachten nun den von den holomorphen Funktionen

$g_1, \dots, g_k, f_1, \dots, f_k$ in A erzeugten Untervektorraum B . Weil die Elemente g_k zu B gehören, trennt B alle Punkte von X ($\beta : X \rightarrow \mathbb{C}^B$, $x \mapsto (f(x))_{f \in B}$, ist injektiv), und (X, β) besitzt lokale Koordinaten durch Funktionen aus B (β ist regulär) .

B ist endlich erzeugt, somit abgeschlossene und vollständige

Teilmenge von A . Deshalb dürfen wir die Sätze (3.4) und (7.2) anwenden. Die Gesamtheit der injektiven und regulären Abbildungen in B^k ist fett.

$\varphi : M \times M \rightarrow B^k$, $(a,b) \rightsquigarrow a g + b f$, erfüllt alle Voraussetzungen von Hilfssatz (1.1): φ ist offen, stetig und surjektiv. Mit $(M \times R) \subset (M \times M)$ ist auch $\varphi(M \times R) \subset B^k$ offen und dicht. Sind U_1 und U_2 nichtleere, offene Mengen in M , so ist $\varphi(U_1 \times (U_2 \cap R)) = \varphi(U_1 \times U_2) \cap \varphi(M \times R) \subset B^k$ offen und nichtleer. Es gibt somit eine Abbildung $h = a g + b f$ aus $B^k = \varphi(M \times M)$ mit folgenden Eigenschaften:

h ist injektiv und regulär,

$\det b \neq 0$, oder h ist eigentlich,

b ist so nahe bei der Nullmatrix und a so nahe bei

der Einheitsmatrix aus M , daß $\varphi(a,b)$ in $U \subset A^k$ liegt.

Damit ist Satz (8.2) bewiesen. ---

Wir haben beim Beweis des Einbettungssatzes nicht die volle Aussage (7.2) benutzt, sondern nur die einfache Folgerung (7.3), die in ähnlicher Form für reduzierte Räume schon bei NARASIMHAN [24, Lemma 6] nachgelesen werden kann. Erinnern wir uns noch einmal an die im §7 definierte Größe $b(\tau)$ für eine holomorphe Abbildung $\tau : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$. Es ist $b(\tau) = \sup \{b_x(\tau) : x \in X\}$ für

$$b_x(\tau) := \begin{cases} 0 & \text{falls } \text{corg}_x(\tau) = 0 \\ \text{corg}_x(\tau) + n_x(\tau) & \text{falls } \text{corg}_x(\tau) \geq 1 \end{cases},$$

wobei $n_x(\tau)$ die lokale Dimension der analytischen Menge aller Punkte aus X bezeichnet, in denen der Corang von mindestens gleich $\text{corg}_x(\tau)$ ist.

Ist $\tau : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (\{y\}, \mathbb{C})$ eine konstante Abbildung, so ist nach Definition $\text{corg}_X(\tau) = \text{emdim}_X(X, \mathcal{A})$. Auch $n_X(\tau)$ hängt nur vom komplexen Raum $(X, \mathcal{A})$ nicht von τ ab:

$$n_X(\tau) = \dim_X \{y \in X : \text{emdim}_y(X, \mathcal{A}) \geq \text{emdim}_X(X, \mathcal{A})\}.$$

Deshalb ist die Bezeichnung $b(X, \mathcal{A}) := b(\tau)$ für eine auf $(X, \mathcal{A})$ konstante Abbildung τ sinnvoll. Wir wissen natürlich, daß $b(X, \mathcal{A}) \leq \text{emdim}(X, \mathcal{A}) + \dim X$ ist; es kann dabei vorkommen, daß $b(X, \mathcal{A})$ echt kleiner als die Summe aus Einbettungs- und komplexer Dimension des Raumes $(X, \mathcal{A})$ ist. Dazu geben wir in Anlehnung an eine Bemerkung im §1 ein einfaches Beispiel an:

$(X, \mathcal{A})$ sei ein komplexer Raum mit $1 < n = \dim X < \text{emdim}(X, \mathcal{A}) = \text{emdim}_{x_0}(X, \mathcal{A}) = m$ für einen Punkt $x_0 \in X$. Wir definieren eine kohärente $\mathcal{A}$ -Modulgarbe $\mathcal{M}$ auf X durch ihre Schnittmengen

$$\mathcal{M}(U) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{falls } x_0 \in U \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für alle $U = \overset{0}{U} \subset X$. Wie wir schon erwähnten, ist nach FORSTER [10, Satz 2.2] auch $(X, \tilde{\mathcal{A}})$ mit $\tilde{\mathcal{A}} := \mathcal{A} \oplus \mathcal{M}$ ein komplexer Raum. Es gilt:

$$\text{emdim}_x(X, \tilde{\mathcal{A}}) = \text{emdim}_x(X, \mathcal{A}) \quad \text{für } x \neq x_0 \quad \text{und}$$

$$\text{emdim}_{x_0}(X, \tilde{\mathcal{A}}) = 1 + \text{emdim}_{x_0}(X, \mathcal{A}) = m + 1.$$

Weil $\text{emdim}_x(X, \tilde{\mathcal{A}}) \leq m < \text{emdim}_{x_0}(X, \tilde{\mathcal{A}})$ für alle $x \neq x_0$ ist, haben wir

$$b_x(X, \tilde{\mathcal{A}}) = b_x(X, \mathcal{A}) \quad \text{für } x \neq x_0 \quad \text{und} \quad b_{x_0}(X, \tilde{\mathcal{A}}) = m + 1.$$

$$b(X, \tilde{\mathcal{A}}) = b(X, \mathcal{A}) \leq n + m < \dim X + \text{emdim}(X, \tilde{\mathcal{A}}). \quad \text{---}$$

Sehen wir uns den Beweis des Satzes (8.2) unter diesem Gesichtspunkt an, so erkennen wir, daß von der dort definierten natürlichen Zahl k nur verlangt werden muß, daß sie größer als $n+1$, $2n+1$ und $b(X, \mathcal{A})$ sein muß. Wir erhalten deshalb folgende Verschärfung des Einbettungssatzes :

(8.4) Satz.

Es sei $(X, \mathcal{A})$ ein n -dimensionaler STEINScher Raum mit $b = b(X, \mathcal{A}) < \infty$, $k = \max \{2n+1, b\}$ und $A = H^0(X, \mathcal{A})$. Dann ist die Gesamtheit aller Einbettungsabbildungen von $(X, \mathcal{A})$ in den $(\mathbb{C}^k, \mathcal{O})$ dicht in A^k . ---

Auf das angegebene Beispiel ist diese Aussage natürlich anwendbar, wenn $(X, \mathcal{A})$ holomorph-vollständig ist, denn auch $(X, \tilde{\mathcal{A}})$ ist dann holomorph-vollständig, weil die Reduktionen $(X, \mathcal{A}_r)$ und $(X, \tilde{\mathcal{A}}_r)$ übereinstimmen. $(X, \tilde{\mathcal{A}})$ kann im $\mathbb{C}^k$ mit $k \leq \dim X + \text{emdim}(X, \mathcal{A}) - 1$ realisiert werden.

Wie früher können wir im reduzierten und normalen Fall einfache Folgerungen angeben :

(8.5) Corollar.

$(X, \mathcal{A})$ sei ein reduzierter STEINScher Raum, $A = H^0(X, \mathcal{A})$, $n = \dim X$ und $m = \text{emdim}(X, \mathcal{A})$ mit $m \geq n+2$.

Dann ist die Gesamtheit aller Einbettungsabbildungen von $(X, \mathcal{A})$ in den $\mathbb{C}^{n+m-1}$ dicht in A^{n+m-1} . ---

(8.6) Corollar.

Ist $(X, \mathcal{A})$ außerdem normal, und ist m sogar mindestens so groß wie $n+3$, so liegt die Menge aller Einbettungen $(X, \mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}^{n+m-2}$ in A^{n+m-2} dicht. ---

§ 9. Anhang.

a) Wir wollen zunächst eine Ergänzung zum § 6 über Tangentialräume angeben und einen Satz von HOLMANN [20, Theorem 1] auch für nichtreduzierte komplexe Räume beweisen.

(9.1) Satz.

Es sei $(\tau, \tau^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ eine holomorphe Abbildung mit $\text{corg}_x(\tau, \tau^*) = m$ für alle $x' \in X$. x sei ein fester Punkt aus X mit $k = \text{emdim}_x(X, \mathcal{A})$ und $n = k - m = \text{rg}_x(\tau, \tau^*)$.

Dann gibt es Umgebungen $U \subset X$ und $V \subset Y$ von x und $\tau(x)$ mit folgenden Eigenschaften :

$\tau(U)$ ist eine analytische Menge in V . Es existiert eine komplexe Struktur $\mathcal{M}$ auf $\tau(U)$, so daß $(\tau(U), \mathcal{M})$ ein Unterraum von $(V, \mathcal{B}|_V)$, $n = \text{emdim}_{\tau(x)}(\tau(U), \mathcal{M})$ und $(U, \mathcal{A}|_U)$ zu $(\tau(U), \mathcal{M}) \times (Z^m, \mathcal{O}_m)$ biholomorph äquivalent ist. ---

Die Fasern $\tau^{-1}(\tau(x'))$, $x' \in X$, versehen mit der τ -Struktur $\tau_x^{-1}\mathcal{F}$, sind von der Einbettungsdimension

$$\text{emdim}_x(\tau^{-1}(\tau(x')), \tau_x^{-1}\mathcal{F}) = \text{corg}_x(\tau, \tau^*) = m.$$

Da die Aussage lokal ist, können wir X so klein wählen, daß $(\tau^{-1}(\tau(x)), \tau_x^{-1}\mathcal{F})$ durch eine holomorphe Abbildung (h, h^*) in den $(Z^m, \mathcal{O}_m)$ eingebettet werden kann. Nun verwenden wir einen Satz von GRAUERT-KERNER [17, Satz 2.2] :

(9.2) Hilfssatz.

Es gibt Umgebungen $U \subset X$, $V \subset Y$ und $G \subset Z^m$ von x , $\tau(x)$ und $h(x)$ sowie eine Einbettungsabbildung (φ, φ^*) von $(U, \mathcal{A}|_U)$ in $(V \times G, \mathcal{B}|_V \times \mathcal{O}_m|_G)$ mit

$$(\varphi, \varphi^*)|_{(U \cap F, \mathcal{F}|_{U \cap F})} \equiv ((\tau, h), (\tau, h)^*)|_{(U \cap F, \mathcal{F}|_{U \cap F})}$$

für $F = \tau^{-1}(\tau(x))$ und $\mathcal{F} = \tau^* \mathcal{F}$. Außerdem ist

$$(\tau, \tau^*)|(U, \mathcal{A}|U) = (\text{pr}_V, \text{pr}_V^*) \circ (\varphi, \varphi^*)$$

für die natürliche Projektion $\text{pr}_V : V \times G \rightarrow V$. ---

Mit Hilfe dieser Aussage sind die Behauptungen von (9.1) leicht zu beweisen: τ ist in der Umgebung U von x eine Projektion. Die Garbe $\mathcal{A}$ ist analytisches Produkt einer Garbe $\mathcal{M}$ auf $\tau(U)$ und $\mathcal{M}^0$. $(\tau(U), \mathcal{M}) \subset (V, \mathcal{B}|V)$ mit $\text{emdim}_{\tau(x)}(\tau(U), \mathcal{M}) = \text{emdim}_x(U, \mathcal{A}|U) - m = k - m = n$.

Vor dem Beweis des Hilfssatzes wollen wir noch eine Bemerkung machen. Es sei $(Y, \mathcal{B}) \subset (V^p, \mathcal{P}^0)$ ein holomorph-vollständiger komplexer Raum. $\mathcal{B} = (\mathcal{P}^0/I)|Y$ für eine kohärente Idealgarbe $I \subset \mathcal{P}^0$ mit Y als Nullstellenmenge. Ist $(X, \mathcal{A})$ ein beliebiger komplexer Raum, $A = H^0(X, \mathcal{A})$ die Gesamtheit der auf ganz X holomorphen Funktionen, so definiert ein Element $f \in A^p$ genau dann eine holomorphe Abbildung von $(X, \mathcal{A})$ in $(Y, \mathcal{B})$, wenn $\mathcal{J}f(X) \subset Y$ und $f^*(X \otimes_{\mathcal{J}f} I) = 0$, d.h. $f_x^*(I_{\mathcal{J}f(x)}) = 0 \in \mathcal{K}_x$ für alle $x \in X$ ist. --

Auch die Aussage (9.2) ist von lokaler Natur. Deshalb sei

$$(X, \mathcal{A}) \subset (Z^k, \mathcal{K}^0), (Y, \mathcal{B}) \subset (Z^r, \mathcal{R}^0), \\ k = \text{emdim}_x(X, \mathcal{A}), r = \text{emdim}_{\tau(x)}(Y, \mathcal{B}), \\ (\tau, \tau^*) : (Z^k, \mathcal{K}^0) \rightarrow (Z^r, \mathcal{R}^0).$$

Z^k ist biholomorph äquivalent zum Graphen von τ . Deshalb genügt es (9.2) für eine analytische Menge in Z^{k+r} und die Projektion $\tau : Z^{r+k} \rightarrow Z^r$, $(z_1, \dots, z_{r+k}) \mapsto (z_1, \dots, z_r)$, zu beweisen.

$I \subset \mathcal{K}_{k+r}^0$ sei die zu $(X, \mathcal{A})$ gehörende Idealgarbe: $\mathcal{A} = (\mathcal{O}/I)|X$; $I_0 = I|(\{0\} \times Z^k)$ definiert eine Garbe $\mathcal{F}$ von $\mathbb{F} = \tau^{-1}(\tau(x))$, $\mathcal{F} = ((\{0\} \times Z^k) \cap \mathcal{O} / I_0)|\mathbb{F}$, die mit

der τ -Strukturgarbe auf F übereinstimmt. Es gilt :

$$\sup \left\{ r_{g_x} \left(\frac{\partial i_\lambda}{\partial z_\mu} \right)_{\lambda, \mu=1, \dots, k} : i_\lambda \in I_{0,x} \right\} = k - \text{corg}_x(\tau, \tau^*) \\ = k - m = n .$$

Deshalb gibt es n Funktionskeime $g_1, \dots, g_n \in I_{0,x}$ mit

$$\det \left(\frac{\partial g_v}{\partial z_{m+v}} \right)_{v=1, \dots, n} \Big|_x \neq 0 ,$$

bei geeigneter Numerierung der $z_1, \dots, z_k$. Zu jedem g_v gibt es außerdem ein $\tilde{g}_v \in I_x$ mit $g_v|(\{0\} \times Z^k) = \tilde{g}_v$ und

$$\det \left(\frac{\partial \tilde{g}_v}{\partial z_{m+v}} \right) \Big|_x \neq 0 .$$

In einer Umgebung U_0 von $x \in Z^{r+k}$ mit den Koordinaten $t_1, \dots, t_r, z_1, \dots, z_k$ führen wir durch

$$w_\varrho := z_\varrho \quad (\varrho=1, \dots, m) \quad \text{und} \quad w_{m+v} := g_v \quad (v=1, \dots, n)$$

neue Koordinaten ein. Dann ist $X \cap U_0$ in der Menge aller Punkte $(t_1, \dots, t_r, w_1, \dots, w_k)$ aus U_0 mit $w_{m+v} = 0$ für $v=1, \dots, n$ enthalten, d.h.

$$(X \cap U_0) \subset (Z^{r+m} \times \{0\}) \subset Z^{r+k} .$$

$(h, h^*) : (F, \mathcal{F}) \rightarrow (Z^m, \mathcal{O})$ ist o.E.d.A. die Spur einer in einer Umgebung von x bezgl. $\{0\} \times Z^m$ holomorphen Abbildung (h, h^*) , die nach GRAUERT [16, § 1 (1)] eine Einbettungsabbildung einer Umgebung $U_1 \subset (\{0\} \times Z^m)$ von x in eine Umgebung $G \subset Z^m$ von $h(x)$ ist. Dann definiert

$$(t_1, \dots, t_r, w_1, \dots, w_k) \rightsquigarrow (t_1, \dots, t_r, h(0, \dots, 0, w_1, \dots, w_m)) .$$

die gesuchte Einbettungsabbildung (φ, φ^*) . ---

HOLMANN hat den Satz (9.1) für reduzierte Räume auf andere Weise ohne Benutzung des Hilfssatzes von GRAUERT und KERNER gezeigt :

Es ist stets $n = \operatorname{rg}_X(\tau, \tau^*) \leq \operatorname{emdim} \tau(x)(Y, \mathcal{B}) = r$.
Zunächst beweist er für $n = r$, daß τ die Spur einer Projektion ist, und die Fasern $\tau^{-1}(\tau(x'))$ der gewöhnlichen Punkte $x' \in X$ m -dimensionale Mannigfaltigkeiten sind. Dann führt er den allgemeinen Fall $r \geq n$ auf den ersten zurück

Bei GRAUERT-KERNER [17, Def. 3.1] heißt eine holomorphe Abbildung $(\tau, \tau^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ genau dann "lokal-trivial", wenn zu jedem Punkt $x \in X$ Umgebungen $U \subset X$ von x und $V \subset Y$ von $\tau(x)$ sowie ein komplexer Raum $(Z, \mathcal{L})$ und eine biholomorphe Abbildung $(\varphi, \varphi^*) : (U, \mathcal{A}|_U) \rightarrow (V \times Z, \mathcal{B}|_V \times \mathcal{L})$ mit $(p, p^*) \circ (\varphi, \varphi^*) = (\tau, \tau^*)$ existieren, wobei $(p, p^*) : (V \times Z, \mathcal{B}|_V \times \mathcal{L}) \rightarrow (V, \mathcal{B}|_V)$ die Projektion auf die erste Koordinate bezeichnet.

Aus Satz (9.1) können wir also sofort schließen, daß eine holomorphe Abbildung $(\tau, \tau^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ genau dann lokal konstanten Corang besitzt, wenn sie in dem angegebenen Sinn lokal-trivial ist.

b) Nun wollen wir die wichtigsten Ergebnisse der Arbeit in einer Tabelle zusammenfassen :

$(X, \mathcal{A})$ sei ein komplexer Raum vom abzählbaren Typ mit der komplexen Dimension n und $b := b(X, \mathcal{A})$. $A = H^0(X, \mathcal{A})$ ist also ein FRÉCHET-Raum.

Eigenschaft von $(X, \mathcal{A})$	N	Für alle $k \geq N$ ist die Menge aller holomorphen Abbildungen (φ, φ^*) von X in den $\mathbb{C}^k$ mit $\varphi : X \rightarrow \mathbb{C}^k$ $\varphi_x^* (x \in X)$ in A^k			Satz
holomorph- separabel	$2n+1$	injektiv	---	fett	(4.1)
holomorph- ausbreitbar	n	diskret	---	fett	(4.3)
schwach-holo- morph-konvex	n	fast- eigentlich	---	fett	(5.1)
holomorph- konvex	$n+1$	eigentlich	---	dicht	(5.3)
lokale Koor- dinaten durch globale Funktionen	b	---	surjektiv	fett	(7.2)
STEINSch	$\max\{b, 2n+1\}$	Einbettungsabbildung		dicht	(8.4)

c) Zum Abschluß wollen wir überlegen, ob es Umkehrungen der in der Tabelle angegebenen Sätze gibt. Im Paragraphen 2 haben wir bereits festgestellt, daß die Existenz einer diskreten¹⁾ (injektiven²⁾, fasteigentlichen³⁾, eigentlichen⁴⁾ oder regulären⁵⁾ holomorphen Abbildung $(\tau, \tau^*) : (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ in einen holomorph-ausbreitbaren¹⁾ (holomorph-separablen²⁾, schwach-holomorph-konvexen³⁾, holomorph-konvexen⁴⁾ oder mit lokalen Koordinaten durch globale Funktionen versehenen⁵⁾ komplexen Raum $(Y, \mathcal{B})$ zum Beweis der entsprechenden Eigenschaften (1) bis 5) von $(X, \mathcal{A})$ hinreicht. Doch könnten wir auch die komplexe Dimension als unbekanntes Merkmal von $(X, \mathcal{A})$ wählen. Es sei also z.B. $\tau : X \rightarrow Y$ eine diskrete (holomorphe) Abbildung. Dann ist $\dim X \leq \dim Y$. Für $Y = \mathbb{C}^m$ muß also m mindestens so groß wie $n = \dim X$ sein, und die Gesamtheit der

diskreten holomorphen Abbildungen ist wegen Satz (4.3) fett in A^m für $A = H^0(X, \mathcal{A})$.

In den anderen Fällen scheint ein ähnliches Verfahren nicht möglich zu sein. Kann es doch durchaus injektive holomorphe Abbildungen von $(X, \mathcal{A})$ in den $(\mathbb{C}^{2n}, 0)$ geben.

Wahrscheinlich wird man Dichte-Eigenschaften solcher Abbildungsmengen in A^m voraussetzen müssen. So könnte etwa gelten :

Vermutung.

$(X, \mathcal{A})$ sei ein n -dimensionaler komplexer Raum mit abzählbarer Topologie und $A = H^0(X, \mathcal{A})$. Die Gesamtheit der injektiven holomorphen Abbildungen von $(X, \mathcal{A})$ in $(\mathbb{C}^m, 0)$ sei dicht in A^m .

Dann ist $m \geq 2n+1$. ---

Literatur

- [1] E.BISHOP : Mappings of partially analytic spaces.
Amer. J. Math. 83 (1961) 209 - 242 .
- [2] N.BOURBAKI : Algèbre. Paris: Hermann.
- [3] -- : Espaces vectoriels topologiques. Paris: Hermann.
- [4] -- : Topologie générale. Paris: Hermann.
- [5] H.CARTAN : Idéaux de fonctions analytiques de n
variables complexes. Ann. É.N.S. 61 (1944)
149 - 197 .
- [6] -- : Idéaux et modules de fonctions analytiques de
variables complexes. Bull. Soc. Math. France 78
(1950) 29 - 64 .
- [7] -- : Séminaire É.N.S. 1951/52, hektographiert.
- [8] -- : Variétés analytiques complexes et cohomologie.
pp 41 - 55 : Coll. sur les fonctions de plusieurs
variables, CBRM , Brüssel (1953) .
- [9] -- : Séminaire É.N.S. 1953/54, hektographiert.
- [10] O.FORSTER : Beiträge zur algebraischen Theorie der
holomorph-vollständigen komplexen Räume. Habili-
tationsschrift, München (1964) .
- [11] -- und K.J.RAMSPOTT : Über die Darstellung analyti-
scher Mengen. Sb. Bayer. Akad. Wiss. Math.-ntw.
Kl. (1963) 89 - 99 .
- [12] R.GODEMENT : Topologie algébrique et théorie des
faisceaux. Paris: Hermann (1958) .
- [13] H.GRAUERT : Charakterisierung der holomorph-voll-
ständigen Räume. Math. Ann. 129 (1955) 233 - 259.
- [14] -- : Charakterisierung der Holomorphiegebiete durch
die vollständige KÄHLERSche Metrik. Math. Ann.
131 (1956) 38 - 75 .
- [15] -- : Ein Theorem der analytischen Garbentheorie
und die Modulräume komplexer Strukturen. Publ.
Math. I.H.E.S. 5 (1960) 233 - 292 .

- [16] -- : Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen. Math. Ann. 146 (1962) 331 - 368 .
- [17] -- und H.KERNER : Deformationen von Singularitäten komplexer Räume. Math. Ann. 153 (1964) 236 bis 260 .
- [18] -- und R.REMMERT : Bilder und Urbilder analytischer Garben. Ann. of Math. 68 (1958) 393 - 443 .
- [19] -- -- : Komplexe Räume. Math. Ann. 136 (1958) 245 bis 318 .
- [20] H.HOLMANN : Local properties of holomorphic mapping Proc. of the Conf. on Complex Analysis at Minneapolis 1964, 94 - 109 (1965) .
- [21] B.O.KOOPMAN und A.B.BROWN : On the covering of analytic loci by complexes. Trans. Amer. Math. Soc. 34 (1932) 231 - 252 .
- [22] S.MACLANE : Homology. Berlin: Springer (1963) .
- [23] M.NAGATA : Local rings. Interscience Publ. (1962).
- [24] R.NARASIMHAN : Imbedding of holomorphically complete complex spaces. Amer. J. Math. 82 (1960) 917 - 934 .
- [25] K.OKA : Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. Tokio : Iwanami Shoten (1961) .
- [26] R.REMMERT : Sur les espaces analytiques holomorphiquement séparables et holomorphiquement convexes C.R. Acad. Sci. Paris 243 (1956) 118 - 121 .
auch : Habilitationsschrift, Münster (1957) .
- [27] -- : Projektionen analytischer Mengen. Math. Ann. 130 (1956) 410 - 441 .
- [28] -- : Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. Math. Ann. 133 (1957) 328 - 370 .
- [29] -- und K.STEIN : Eigentliche holomorphe Abbildungen Math. Z. 73 (1960) 159 - 189 .
- [30] J.P.SERRE : Géométrie algébrique et géométrie analytique. Ann. Inst. FOURIER 6 (1955/56) 1 - 42 .

- [31] K.STEIN : Analytische Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen zu vorgegebenen Periodizitätsmoduln und das zweite COUSINSche Problem. Math. Ann. 123 (1951) 201 - 222.
- [32] -- : Überlagerungen holomorph-vollständiger komplexer Räume. Arch. Math. 7 (1956) 354 - 361.

L e b e n s l a u f

Ich wurde am 18. Oktober 1938 als Sohn des Knappschaftsbeamten Heinrich Wiegmann und seiner Ehefrau Dorothea, geborene Schäfers, in Bochum geboren.

Ab Herbst 1944 bis Ostern 1948 war ich Volksschüler in Eben (Österreich) und Gelsenkirchen-Buer. Dann besuchte ich das Max-Planck-Gymnasium in Buer und ab Ostern 1954 das Mathematisch naturwissenschaftliche Gymnasium zu Herten (Westfalen). Dort erlangte ich im März 1958 die Hochschulreife.

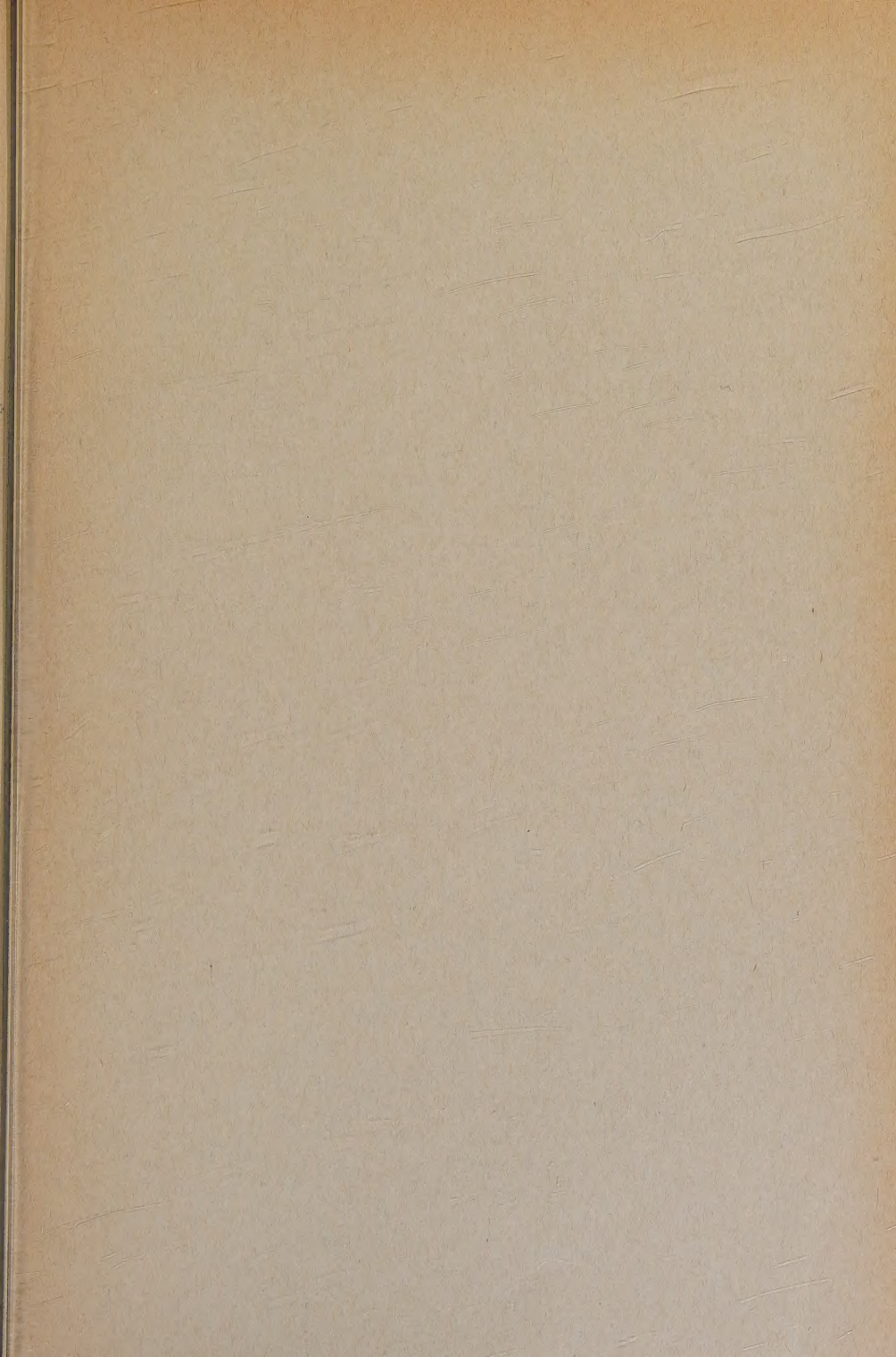
Seit dem Sommersemester 1958 studiere ich Naturwissenschaften. Zunächst war ich bis zum Frühjahr 1961 an der Universität Bonn immatrikuliert und bestand dort im Januar 1961 die Diplomvorprüfung in Mathematik. Anschließend kam ich nach München. Hier machte ich im Juli 1963 auch die Hauptprüfung für Diplom-Mathematiker.

Ich hörte Vorlesungen u.a. bei F. Bopp, E. Heinz, B. Helferich, F. Hirzebruch, F. Kasch, M. Kneser, M. Koecher, H. Koppe, W. Krull, W. Paul, E. Peschl, H. Richter, W. Riezler, W. Rollwagen, K. Saller, A. Schlüter, W. Stegmüller, K. Stein, W. Thimm, H. Unger und W. Weizel.

Seit September 1964 bin ich Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle am Mathematischen Institut der Universität München.

München, im Mai 1965

Klaus-Werner Wiegmann



Xerografie - Druck
Chemoprint^{OHG}
Gießen